Grundlagen der Physik 1
Lösung zu Übungsblatt 7

Daniel Weiss

25. November 2009

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1

a) Die Höhe h kann mit Hilfe der Winkelbeziehungen berechnet werden. Siehe dazu Abbildung 1.

$$L - h = L\cos(\alpha) \Leftrightarrow h = L(1-\cos(\alpha)) = 13{,}4\text{cm} \tag{1}$$

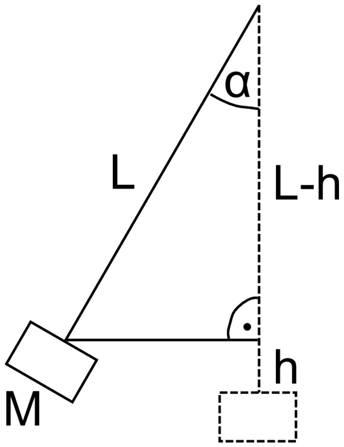

Abbildung 1: Holzblock an masseloser Stange

b) Es gilt die Energieerhaltung. Da die Masse als punktförmig angenommen werden kann, kann mit der kinetischen Energie ohne Berücksichtigung von Rotationsenergien gerechnet werden.

$$E_1 = Mgh \tag{2}$$

$$E_2 = \frac{1}{2}Mv^2 \tag{3}$$

Setze nun die Energien gleich und löse nach der Geschwindigkeit des Holzblocks

$$E_1 = E_2$$

$$v_1 = \sqrt{2gh} \tag{4}$$

Nun wird ein Projektil auf den Holzblock geschossen. Die Impulserhaltung liefert die Projektilgeschwindigkeit. Der Impuls nach dem "Einschlag" muss 0 sein, da sich der Block samt Projektil nicht mehr bewegt.

$$mv_1 + Mv_2 = 0 \tag{5}$$

$$\overset{(4)}{\Rightarrow} v_1 = \frac{M}{m}\sqrt{2gh} = 162{,}14\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{6}$$

Aufgabe 2

a) Da es sich um einen dünnen Stab handelt, kann das durch die Ausdehnung entstehende Trägheitsmoment vernachlässigt werden.

$$I = \rho \cdot A \cdot \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dz \cdot z^2 = \rho A \left[\frac{1}{3}z^3\right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \rho A \frac{2}{3}\frac{l^3}{8} = \frac{1}{12}ml^2 \tag{7}$$

b) Analog zu Teil a):

$$I = \rho A \int_0^l dz \cdot z^2 = \frac{1}{3}\rho A l^3 = \frac{1}{3} m l^2 \tag{8}$$

c) Allgemein kann das neue Trägheitsmoment bei Verschieben der Achse mit dem Satz von Steiner berechnet werden. Das Trägheitsmoment bezüglich einer beliebigen Achse ergibt sich somit aus der Summe des Trägheitsmoments welches ein Punktteilchen an der Position des Schwerpunktes bezüglich dieser neuen Achse hat und des Trägheitsmoments des Körpers bezüglich des Schwerpunktes. Die Masse des Punktteilchens ist dabei die Gesamtmasse des Körpers.

$$\frac{1}{3} m l^2 - \frac{1}{12} m l^2 = \frac{4}{12} m l^2 - \frac{1}{12} m l^2 = \frac{3}{12} m l^2 = m \left(\frac{l}{2}\right)^2 \tag{9}$$

In diesem Fall also eine Verschiebung um $\frac{l}{2}$.

Aufgabe 3

Es gilt die Impulserhaltung. Allerdings wird der Impuls nicht in eine Translation sondern eine Rotation umgesetzt. Der Drehimpuls der Stange ist:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow L = \frac{l}{2} m_1 v_1 \tag{10}$$

da die Stange in ihrer Mitte drehbar aufgehängt ist und ihr der Impuls $m_1 v_1$ von dem Projektil zugeführt wird. Weiterhin gilt

$$L = I\omega. \tag{11}$$

Gleichsetzen und auflösen nach ω liefert die gesuchte Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{6 m_1 v_1}{(m + 3m_1) l} = 29{,}1 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \tag{12}$$

Hierbei wurde verwendet, dass $I = I_{\text{Stange}} + I_{\text{In Stange steckendes Geschoss}} = \frac{1}{12} m l^2 + m_1 \left(\frac{l}{2}\right)^2$ Die Trägheitsmomente wurden bereits in Aufgabe 2 ausgerechnet bzw. das des Massenpunktes (Projektil als Massenpunkt genähert) folgt aus dem Satz von Steiner.

Aufgabe 4

a) Der Hinweis liefert die allgemeine Formel zum berechnen des Trägheitsmomentes eines Quaders mit infinitesimaler Breite und Höhe.

$$I(a,b) = \frac{M}{12}(a^2 + b^2) = \underbrace{\frac{M}{12} a^2}_{I_y(a)} + \underbrace{\frac{M}{12} b^2}_{I_x(b)} \tag{13}$$

Das Trägheitsmoment bezüglich der y-Achse ist also:

$$I_y(L) = \frac{1}{12} M L^2. \tag{14}$$

Da die Breite und Höhe des Zylinders für das Trägheitsmoment in y-Richtung unerheblich sind, darf $a = L$ in diese Formel ohne Integration eingesetzt werden. Bezüglich der x-Achse:

$$I_x = \frac{1}{12} \rho a \int_{-R}^{R} dz \cdot b^3 \tag{15}$$

Mit $b = 2\sqrt{R^2 - z^2}$ folgt

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{1}{12} \rho a \int_{-R}^{R} dz \cdot 8\sqrt{(R^2 - z^2)^3} = \frac{1}{12} \rho a \pi R^2 \cdot 3R^2 = \\ &= \frac{1}{4} M R^2 \end{aligned} \tag{16}$$

Die Breite des Quaders entlang der z-Achse ist nicht konstant, sondern ändert sich in Abhängigkeit von z. Es muss also über die z-Achse integriert werden. Das b^3 kommt aus dem Produkt von $M = ab \cdot dz$ mit b^2. Das Gesamtträgheitsmoment ist

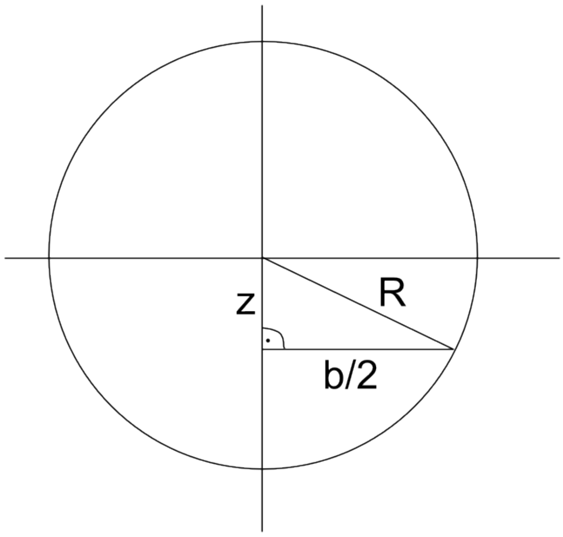

Abbildung 2: Trägheitsmoment in x-Richtung

nun die Summe der einzelnen Komponenten:

$$I = I_x + I_y = \frac{1}{4} M R^2 + \frac{1}{12} M L^2 \tag{17}$$

b) Das im Hinweis angegebene Trägheitsmoment bezieht sich auf die x-Achse einer infinitesimal kleinen Scheibe. Das Trägheitsmoment dieser Scheibe in Bezug auf die Drehachse erhalten wir in Abhängigkeit des Abstandes y der Scheibe von der Drehachse in y-Richtung mit dem Satz von Steiner:

$$I_{\text{Scheibe}} = \frac{1}{4} M R^2 \tag{18}$$

Also für eine infinitesimale Scheibe im Abstand y von der Drehachse:

$$I(y) = I_{\text{Scheibe}} + M y^2 = I_{\text{Scheibe}} + \rho \pi R^2 \cdot dy \cdot y^2 \tag{19}$$

Integration über die Länge des Zylinders liefert das gesamte Trägheitsmoment

$$\begin{aligned} I &= I_{\text{Scheibe}} + \rho \pi R^2 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dy \cdot y^2 = I_{\text{Scheibe}} + \rho \pi R^2 \frac{1}{12} L^3 = \\ &= I_{\text{Scheibe}} + \frac{1}{12} M L^2 = \frac{1}{4} M R^2 + \frac{1}{12} M L^2 \end{aligned} \tag{20}$$

Zuletzt wurde $M = \rho \pi R^2 \cdot L$ für die Masse des Zylinders eingesetzt.

Aufgabe 5

a) Es wirkt jeweils nur die Gravitationskraft auf beide Zylinder. Die Komponente parallel zur Bahn entspricht dem Drehmoment auf den Schwerpunkt bezüglich des Abrollpunktes des Zylinders.

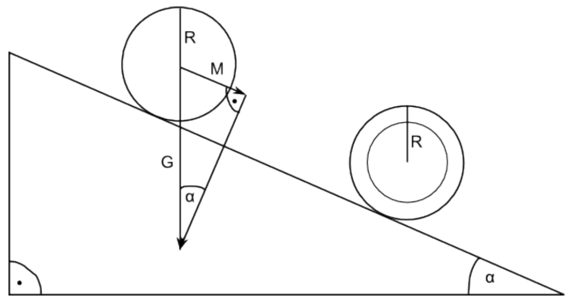

Abbildung 3: Kräfte und Drehmomente auf rollende Zylinder

b) i) Trägheitsmoment des Vollzylinders bezüglich Auflagefläche (mit Satz von Steiner):

$$\begin{aligned} I &= m R^2 + \rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^L dl \int_0^R dr \cdot r^3 \\ &= m R^2 + \frac{1}{2} m R^2 = \frac{3}{2} m R^2 \end{aligned} \tag{21}$$

Die Änderung des Drehimpulses kann nun geschrieben werden als:

$$\frac{dL}{dt} = I\dot{\omega} = M = Rmg\sin(\alpha) \tag{22}$$

Es gilt:

$$\dot{\omega} = \frac{\dot{v}}{R} = \frac{a}{R} \tag{23}$$

Dies lässt sich nun nach a umformen.

$$\begin{aligned} Ia &= R^2 mg\sin(\alpha) \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}mR^2 a &= R^2 mg\sin(\alpha) \\ \Leftrightarrow a &= \frac{2g\sin(\alpha)}{3} \end{aligned} \tag{24}$$

ii) Trägheitsmoment des Hohlzylinders (analog zu i):

$$\begin{aligned} I &= mR^2 + \rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^L dl \int_{R_1}^{R_2} dr \cdot r^3 \\ &= mR^2 + \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2) = 2mR^2 \end{aligned} \tag{25}$$

Dabei wurde für $R_2 - R_1 << R_2 = R$ approximiert, da es sich um einen dünnwandigen Hohlzylinder handelt. Mit der Umformung 24 erhalten wir:

$$a = \frac{g\sin(\alpha)}{2} \tag{26}$$

c) Es gilt die Energierhaltung.

$$E_1 = mgs\sin(\alpha) \tag{27}$$

$$E_2 = \frac{1}{2}(mv^2 + I\omega^2) = \frac{1}{2}v^2\left(m + \frac{I}{R^2}\right) \tag{28}$$

$$E_1 = E_2 \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2mgs\sin(\alpha)}{m + \frac{I}{R^2}}} \tag{29}$$

Mit dem Ergebnis für a aus Gleichung 24 lässt sich t berechnen.

$$v = at \Rightarrow t = \frac{v}{a} \tag{30}$$

$$t = \sqrt{\frac{2sI_A^2}{\left(m + \frac{I_S}{R^2}\right)R^4 mg\sin(\alpha)}} \tag{31}$$

Also für die beiden Zylinder (Trägheitsmomente bez. Rotationsachse durch Schwerpunkt (I_S) bzw. bez. Auflagefläche (I_A) einsetzen):

$$v_{\text{Vollzylinder}} = \sqrt{\frac{4\sin(\alpha)gs}{3}} \tag{32}$$

$$v_{\text{Hohlzylinder}} = \sqrt{\sin(\alpha)gs} \tag{33}$$

$$t_{\text{Vollzylinder}} = \sqrt{\frac{3s}{g\sin(\alpha)}} \tag{34}$$

$$t_{\text{Hohlzylinder}} = \sqrt{\frac{4s}{g\sin(\alpha)}} \tag{35}$$

d)

$$\frac{E_{\text{kin}}}{E_{\text{rot}}} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}I\omega^2} = \frac{mR^2}{I} =: k \tag{36}$$

Im Spezialfall der beiden Zylinder:

$$k_{\text{Vollzylinder}} = 2 \tag{37}$$

$$k_{\text{Hohlzylinder}} = 1 \tag{38}$$

Aufgabe 6

Auf die rotierende Scheibe wirkt ein verzögerndes Drehmoment M. Dieses ändert den Drehimpuls:

$$M = \frac{dL}{dt} = I\dot{\omega} \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{M}{I} \tag{39}$$

Weiterhin gilt für den Drehimpuls zu einem Zeitpunkt t bei konstanter, gleichmäßiger Verzögerung $\dot{\omega} = \text{const.}$:

$$L(t) = I\omega(t) = I(\omega_0 - \dot{\omega}t) \tag{40}$$

Mit Gleichung 39 und $\omega = 2\pi f$ folgt

$$L(t) = I(2\pi f_0 - \frac{M}{I}t) \tag{41}$$

Die Scheibe kommt nach 3 Min. zum Stillstand, also:

$$L(t_1 = 180\text{s}) = 0 \Leftrightarrow M = \frac{2I\pi f_0}{t} = \frac{mR^2\pi f_0}{t_1} = 0{,}07\text{Nm} \tag{42}$$

Als Trägheitsmoment wurde hier $I = \frac{1}{2}mR^2$ eingesetzt, welches in der Aufgabe 5 in Gleichung 21 bereits berechnet wurde. Die Scheibe kann als Zylinder mit sehr kleiner Länge L angenommen werden. Die Länge spielt aber hinsichtlich des Trägheitsmomentes sowieso keine Rolle.