1.4 Aufgaben

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Aufgabe 1.1: Man beweise $(\ln(t))' = 1/t$, mit Hilfe von $(e^x)' = e^x$.

Aufgabe 1.2: Welche geometrische Bedeutung hat die Formel (1.9) bzw. (1.10)?

$$(f^{-1})' = (f')^{-1}$$

bzw. $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

Aufgabe 1.3: Man berechne die erste Ableitung von

a) $f(x) = x^3 \ln(x^2 - 2x + 5)$ an der Stelle $x = 1$,

b) $f(x) = \sin^2(3x + \pi/6)$ an der Stelle $x = 0$.

(*Lösung:* a) $3 \ln 4$, b) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$)

Aufgabe 1.4: Man zeige: Die n-te Ableitung eines Polynoms vom Grad n,

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$$

ist konstant. Wie lautet die Konstante?

(*Lösung:* $n!\, a_n$)

Aufgabe 1.5: Man zeige: Jede Funktion der Gestalt $y(t) = a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t)$ ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0 .$$

Aufgabe 1.6: Man bestimme die absolute und relative Konditionszahl von $f(x) = \ln(1 + x)$. Für welche Werte von x liegt schlechte Kondition vor?

Aufgabe 1.7: Für welchen Wert von a ist die Gerade durch den Nullpunkt $y = a\,x$ die bestmögliche Approximation (im Sinne der mittleren quadratischen Abweichung) an die Funktion $g(x) = \ln(1+x)$, wenn man der Anpassung den Datensatz $\{(x_i, g(x_i)),\ i = 0 \ldots 5\}$ mit $x_i = i/10$ zugrunde legt? (Taschenrechner.)

(*Lösung:* $a \approx 0.84$)

Aufgabe 1.8: Man berechne $\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\, dt$. (Hinweis: $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$.)

(*Lösung:* $\pi/4$)

Aufgabe 1.9: Man berechne $\int_0^1 \cos(a\,t + b)\, dt$ $(a \neq 0)$.

(*Lösung:* $(\sin(a+b) - \sin(b))/a$)

Aufgabe 1.10: * Man berechne die Stammfunktion von $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$.

(*Lösung:* $\frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right]$)