Grundlagen der Physik 1
Lösung zu Übungsblatt 10

Daniel Weiss

16. Dezember 2009

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1

Das Äquipartitionstheorem besagt, dass im thermischen Gleichgewicht alle Freiheitsgrade im Mittel dieselbe kinetische Energie haben. Abhängig von der Anzahl der Freiheitsgrade f gilt also für N Atome:

$$\overline{u} = \frac{f}{2} N k_B T \tag{1}$$

Daraus ergibt sich direkt die spezifische Wärmekapazität pro Atom von $\frac{f}{2} k_B$ und somit die spezifische Wärmekapazität in einem Gas mit N Atomen:

$$c_V = \frac{f}{2} N k_B \tag{2}$$

Also beispielsweise für ein einatomiges Gas, welches 3 Translations- und keine Rotationsfreiheitsgrade besitzt:

$$\overline{u} = \frac{3}{2} N k_B T \tag{3}$$

$$c_V = \frac{3}{2} N k_B \tag{4}$$

und für ein zweiatomiges Gas mit 3 Translations-, 2 Rotations- und 2 Schwingungsfreiheitsgraden:

$$\overline{u} = \frac{7}{2} N k_B T \tag{5}$$

$$c_V = \frac{7}{2} N k_B \tag{6}$$

Aufgabe 2

Aus der allgemeinen Gasgleichung folgt für die Teilchendichte:

$$pV = N k_B T \tag{7}$$

$$p = \frac{N}{V} k_B T = n k_B T \Rightarrow n = \frac{p}{k_B T} \tag{8}$$

Weiterhin gilt für die mittlere freie Weglänge

$$\Lambda = \frac{\sqrt{\overline{c^2}}}{f} = \frac{\sqrt{\frac{3k_B T}{m}}}{f} \tag{9}$$

und

$$\Lambda = \frac{1}{\sqrt{2} n \pi d^2} \Rightarrow d \overset{(8)}{=} \sqrt{\frac{k_B T}{\sqrt{2} p \pi \Lambda}} \tag{10}$$

Setze nun Gleichung 9 in 10:

$$d = \sqrt{\frac{k_B T}{\sqrt{2} p \pi} \cdot \frac{f}{\sqrt{\frac{3k_B T}{m}}}} = 1{,}89 \cdot 10^{-10}\mathrm{m} \tag{11}$$

Aufgabe 3

Die Temperatur kann mit der allgemeinen Gasgleichung berechnet werden.

$$pV = N k_B T \Leftrightarrow T = \frac{pV}{N k_B} = 72{,}46 K \tag{12}$$

Sofern es dieselbe Anzahl Moleküle bei gleichem Druck und gleichem Volumen sind, ist die Temperatur laut der allgemeinen Gasgleichung ebenfalls gleich. Bei O_2-Molekülen ändert sich also unter diesen Voraussetzungen die Temperatur nicht!

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = 946,2 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{13}$$

Hierbei wurde verwendet: $m = 2{,}0159 \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} \cdot \frac{1}{N_A}$.

Aufgabe 4

Die Schallgeschwindigkeit in einem idealen Gas ist

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} = 318{,}92 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{14}$$

Hierbei wurde für den Normaldruck $p = 1{,}013 \cdot 10^5 \mathrm{Pa}$ eingesetzt.

Die mittlere Quadratische Geschwindigkeit ist

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}} = 429{,}08 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{15}$$

Dieser Wert weicht ein wenig von der Angabe ab, da ich mit einer Normaltemperatur von 295K, also 22°C gerechnet habe und für den Wert in der Angabe mit $T = 19°\mathrm{C}$ gerechnet wurde. Die molare Masse des Argons ist: $m = 39{,}948\mathrm{u}$ (Wikipedia).

Die wahrscheinlichste Geschwindigkeit (auf letztem Blatt hergeleitet) ist

$$v_W = \sqrt{\frac{2k_BT}{m}} = 348{,}64 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{16}$$

Die Abweichung liegt auch hier an der leicht anderen eingesetzten Temperatur.

Aufgabe 5

a) Setze in Gleichung 10 ein:

$$d = 2{,}655 \cdot 10^{-10} \mathrm{m} \tag{17}$$

b) Aus Gleichung 10 ergibt sich durch ein wenig Umstellen:

$$\Lambda = \frac{k_BT}{\sqrt{2} p \pi d^2} = 1{,}3\mathrm{m} \tag{18}$$

c) Das Verhältnis der mittleren freien Weglänge zum Durchmesser der Vakuumröhre bestimmt die Art der auftretenden Strömung. Es gibt die viskose Strömung für $\Lambda << d$, die Knudsenströmung für $\Lambda \approx d$ und die molekulare Strömung für $\Lambda >> d$. Je größer die mittlere freie Weglänge im Vergleich zum Durchmesser ist, desto höher das Vakuum. D.h. um ein möglichst hohes Vakuum zu erreichen, sollte der Durchmesser der Vakuumröhre möglichst gering sein, da die mittlere freie Weglänge nicht von diesem abhängt, sondern lediglich von Temperatur, Druck und Molekülgröße.

Aufgabe 6

Der genaue Wert ergibt sich durch Integration von $n(v)$ in den Grenzen $v = 250$ bis $v = 260$. Zur Abschätzung berechnet man den Flächeninhalt unter der Kurve genähert als Rechteck mit der Höhe von $\frac{n(260)-n(250)}{2}+n(250)$ und der Breite $260-250=10$. Das ergibt:

$$\left(\frac{n(260)-n(250)}{2}+n(250)\right)\cdot 10 = 0{,}015055 \approx 1{,}5\% \tag{19}$$

Der genaue Wert mittels Integration liegt bei 0,015057. Die Abschätzung ist also relativ genau!

$$n(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \tag{20}$$