Grundlagen der Physik 1
Lösung zu Übungsblatt 3

Daniel Weiss

26. Oktober 2009

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1

Das Geschoss beschreibt eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit, die von einer - durch die Gravitationskraft bedingten - beschleunigten Bewegung in vertikaler Richtung überlagert wird. Nach der Zeit t trifft das Geschoss das Ziel. t wird dabei nur durch die horizontale, konstante Geschwindigkeit bestimmt. Nach der Zeit t wäre das Geschoss ohne die Gravitationskraft am Startpunkt des Ziels; durch die Überlagerung mit der beschleunigten Bewegung befindet sie sich jedoch um s nach unten versetzt. Dieses s entspricht genau der Strecke, die ein Körper im freien Fall in der Zeit t zurücklegt, also auch das Ziel. Daher trifft das Geschoss unter diesen Bedingungen immer das Ziel - sofern l und h sinnvoll gewählt werden.

$$x_{\text{Geschoss}}(t) = l \tag{1}$$
$$y_{\text{Geschoss}}(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin(\alpha) \tag{2}$$
$$x_{\text{Ziel}}(t) = v_0 t \cos(\alpha) \tag{3}$$
$$y_{\text{Ziel}}(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h \tag{4}$$

Bedingung für Treffen des Geschosses: $y_{\text{Geschoss}}(t) = y_{\text{Ziel}}(t)$

$$\Rightarrow h = v_0 t \sin(\alpha) \tag{5}$$

Weiterhin muss gelten: $x_{\text{Geschoss}}(t) = x_{\text{Ziel}}(t)$

$$\Rightarrow l = v_0 t \cos(\alpha) \tag{6}$$

Dividiere Gleichung 5 durch 6

$$\Rightarrow \frac{h}{l} = tan(\alpha) \tag{7}$$

Schaut man sich die Winkelbeziehungen an, so gilt Gleichung 7 für alle $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ D.h. das Geschoss trifft immer das Ziel, sofern $l > 0$ (sonst ist Gl. 7 nicht definiert). Falls $l = 0$, dann muss auch $h = 0$ sein und umgekehrt. Sonst gilt diese Beziehung nicht für beliebige Abschussgeschwindigkeiten.

Aufgabe 2

a) Es gilt der Energieerhaltungssatz. Die Startenergie besteht aus der kinetischen Energie und der potenziellen Energie beim Abschuss. Die Endenergie nur aus kinetischer Energie. Dabei wird für die potentielle Energie angenommen, dass $H << R_{\text{Erde}}$ und der Versuch nahe der Erdoberfläche stattfindet. Sodass $E_{\text{pot}} = mgH$ gilt.

$$E_0 = mgH + \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{8}$$
$$E_1 = \frac{1}{2}mv_{\text{imp}}^2 \tag{9}$$

Energieerhaltung: $E_0 = E_1$

$$\begin{aligned} mgH + \frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}mv_{\text{imp}}^2 \\ \Leftrightarrow 2gH + v_0^2 &= v_{\text{imp}}^2 \\ \Leftrightarrow v_0 &= \sqrt{v_{\text{imp}}^2 - 2gH} \end{aligned} \tag{10}$$

b) Stelle die Komponentengleichungen für $x(t)$ und $y(t)$ auf und berechne deren Ableitungen.

$$x(t) = v_0 t \cos(\alpha) \tag{11}$$

$$y(t) = v_0 t \sin(\alpha) + \frac{1}{2}gt^2 \tag{12}$$

$$\dot{x}(t) = v_0 \cos(\alpha) \tag{13}$$

$$\dot{y}(t) = v_0 \sin(\alpha) + gt \tag{14}$$

Dabei zeigt die x-Achse in Richtung der horizontalen Geschwindigkeit und die y-Achse nach unten, sodass im Nullpunkt gestartet wird. Beim Auftreffen auf den Boden gilt dann: $y(t) = H$

$$\Rightarrow H = v_0 t \sin(\alpha) + \frac{1}{2}gt^2 \tag{15}$$

$$\Rightarrow t_{1/2} = \frac{-v_0 \sin(\alpha) \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2(\alpha) + 2gH}}{g} \tag{16}$$

In Gleichung 16 ist der Radikant größer als der andere Summand. Deshalb kann es nur eine positive und damit physikalisch sinnvolle Lösung geben. Diese erhält man durch addieren des Radikant.

$$\overset{(16)\text{ in }(14)}{\Longrightarrow} \dot{y}(t_1) = v_0 \sin(\alpha) - v_0 \sin(\alpha) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\alpha) + 2gH} \tag{17}$$

$$\text{Pythagoras: } |v_{\text{imp}}| = \sqrt{\dot{x}^2(t_1) + \dot{y}^2(t_1)} \tag{18}$$

$$\Rightarrow |v_{\text{imp}}| = \sqrt{v_0^2 \cos^2(\alpha) + v_0^2 \sin^2(\alpha) + 2gH} = \sqrt{v_0^2 + 2gH}$$

$$\Leftrightarrow |v_0| = \sqrt{|v_{\text{imp}}|^2 - 2gH} \tag{19}$$

Aufgabe 3

a) Neben den Größen in Abbildung 1 muss zusätzlich noch die Zeit gemessen werden.

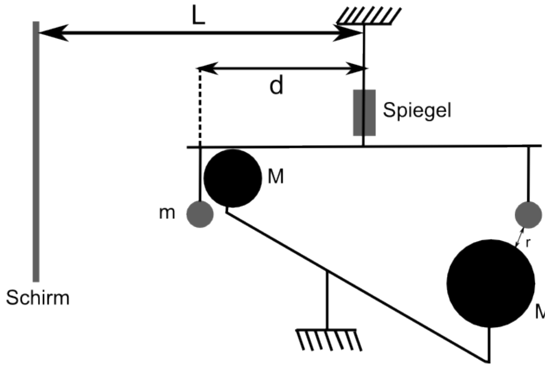

Abbildung 1: Drehwaage nach Cavendish

b) Nach dem "Umlegen" der beiden großen Massen M wirken zwei Kräfte auf die beiden kleinen Massen. Zum einen die Gravitationskraft der beiden großen Massen - hierbei reicht es nur ein Kugelpaar zu betrachten, weil die zusätzliche Anziehungskraft der zweiten großen Kugel durch die zusätzliche träge Masse der zweiten kleinen Kugel ausgeglichen wird. Zum anderen wirkt eine Torsionskraft, die durch den Faden ausgeübt wird, der bestrebt ist sich in seinen Ursprungszustand zurückzudrehen. Diese Torsionskraft muss genauso groß sein wie die wirkende Gravitationskraft, weil das System zuvor im Gleichgewicht war.

$$F = 2G\frac{mM}{r^2} \tag{20}$$

$$F = ma \Rightarrow G = \frac{ar^2}{2M} \tag{21}$$

Stelle nun die Bewegungsgleichung auf (freier Fall) und setze in Gleichung 21 ein

$$s = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow a = \frac{2s}{t^2} \tag{22}$$

$$\overset{(21)}{\Longrightarrow} G = \frac{r^2 \cdot 2s}{2Mt^2} = \frac{r^2 s}{Mt^2} \tag{23}$$

Wende nun den Strahlensatz an, da ich die zurückgelegte Entfernung r nur auf dem Schirm und nicht direkt messe und erhalte:

$$\frac{L}{\frac{x}{2}} = \frac{d}{r} \Rightarrow r = \frac{xd}{2L} \tag{24}$$

Setze nun Gleichung 24 in Gleichung 23 und erhalte die endgültige Formel für G

$$G = \frac{xdr^2}{2LMt^2} \tag{25}$$

c) Setze die gegebenen Werte in Gleichung 25 ein:

$$G = \frac{4{,}7 \cdot 10^{-2}\text{m} \cdot 4 \cdot 10^{-2}\text{m} \cdot 5^2 \cdot 10^{-4}\text{m}^2}{2 \cdot 15\text{m} \cdot 1\text{kg} \cdot 50^2\text{s}^2} = 6{,}267 \cdot 10^{-11}\frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \tag{26}$$

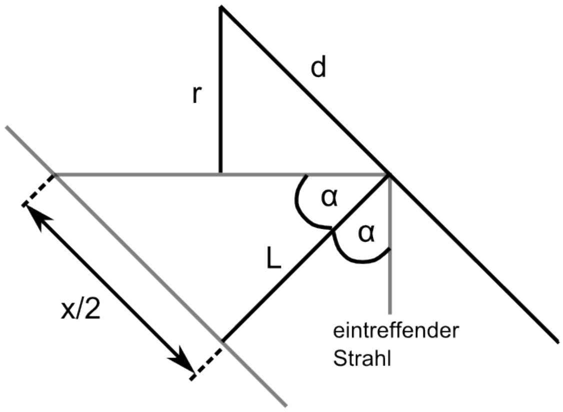

Abbildung 2: Strahlensatz

Dieses Ergebnis lässt sich noch verbessern, wenn man die Anziehungskraft der weiter entfernten Masse M auf die "Testmasse" berücksichtigt:

$$F_{\text{Fernwirkung}} = G \frac{mM}{\underbrace{r^2 + 4d^2}_{\text{Pythagoras} \,\widehat{=}\, \text{Hypotenuse}}} \cdot \underbrace{\frac{r}{\sqrt{r^2 + 4d^2}}}_{\cos(\alpha)} \tag{27}$$

Dabei ist der erste Term des Produkts die Gravitationskraft, die von der entfernten Kugel auf die Testmasse wirkt und der zweite Term der Kosinus von dem Winkel zwischen der Richtung dieser Kraft und der r-Richtung. Siehe auch Abbildung 3. Daraus ergibt sich die korrigierte Gravitationskonstante zu:

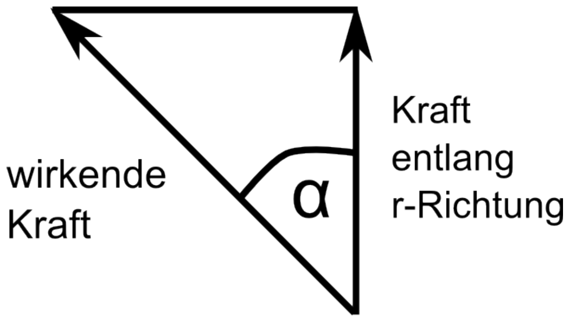

Abbildung 3: Kräftedreieck "Fernkraft"

$$
\begin{aligned}
F_{\text{korrigiert}} &= F - F_{\text{Fernwirkung}} \\
\Leftrightarrow \frac{F_{\text{korrigiert}}}{F} &= \frac{F - F_{\text{Fernwirkung}}}{F} = \\
&= 1 - \frac{F_{\text{Fernwirkung}}}{F} =: \gamma && (28) \\
\overset{\text{Mit (20) und (27)}}{\Longrightarrow} \gamma &= 1 - \frac{r^3}{(r^2 + 4d^2)^{\frac{3}{2}}} && (29)
\end{aligned}
$$

Es muss nun der Term 20 um den Faktor γ korrigiert werden

$$
F = 2G_{\text{korrigiert}} \frac{mM}{r^2} \cdot \gamma \tag{30}
$$

Daraus ergibt sich der korrigierte Term für (21)

$$
\begin{aligned}
G_{\text{korrigiert}} &= \frac{ar^2}{2M} \cdot \frac{1}{\gamma} \\
\Rightarrow G_{\text{korrigiert}} &= G \cdot \frac{1}{\gamma} = \frac{G}{1 - \frac{F_{\text{Fernwirkung}}}{F}} && (31)
\end{aligned}
$$

Gleichung 29 liefert zusammen mit der letzten Gleichung den korrigierten Wert für G

$$
G_{\text{korrigiert}} = 6{,}268 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \tag{32}
$$

d) Das Ergebnis weicht um 6,10%, das korrigierte um 6,08% vom Literaturwert ($6{,}674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$) ab. Diese Abweichung lässt sich zum einen durch vernachlässigte Störeinflüsse wie z.B. die Reibung erklären. Zum anderen gelten die verwendeten Formeln in erster Näherung nur für kleine Auslenkungen α.

Aufgabe 4

Angaben

- Masse der Erde $M_{\text{E}} = 5{,}974 \cdot 10^{24}\text{kg}$
- Masse des Mondes $M_{\text{M}} = 7{,}349 \cdot 10^{22}\text{kg}$
- Radius der Erde $R_{\text{E}} = 6{,}378 \cdot 10^{6}\text{m}$
- Radius des Mondes $R_{\text{M}} = 1{,}738 \cdot 10^{6}\text{m}$
- Abstand des Mondes zur Erde $R_{\text{EM}} = 3{,}84 \cdot 10^{8}\text{m}$

- Gravitationskonstante $G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$

Die Abschussgeschwindigkeit muss mindestens so groß sein, dass der Körper den neutralen Punkt R_N erreicht, an dem sich die Erdgravitation und die Mondgravitation gegenseitig aufheben. Die restliche Strecke "fällt" er auf den Mond. Berechne also zunächst R_N.

Gravitationskraft des Mondes im Abstand r von der Erde

$$F_\mathrm{M}(r) = G\frac{mM_\mathrm{M}}{(R_\mathrm{EM}-r)^2} \tag{33}$$

Gravitationskraft der Erde

$$F_\mathrm{E}(r) = G\frac{mM_\mathrm{E}}{r^2} \tag{34}$$

im Neutralpunkt bei R_N gilt:

$$F_\mathrm{M}(R_\mathrm{N}) = F_\mathrm{E}(R_\mathrm{N}) \tag{35}$$

$$\Leftrightarrow G\frac{mM_\mathrm{M}}{(R_\mathrm{EM}-R_\mathrm{N})^2} = G\frac{mM_\mathrm{E}}{R_\mathrm{N}^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{M_\mathrm{M}}{(R_\mathrm{EM}-R_\mathrm{N})^2} = \frac{M_\mathrm{E}}{R_\mathrm{N}^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{M_\mathrm{M}}{M_\mathrm{E}} = \frac{(R_\mathrm{EM}-R_\mathrm{N})^2}{R_\mathrm{N}^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{M_\mathrm{M}}{M_\mathrm{E}}} = \frac{R_\mathrm{EM}-R_\mathrm{N}}{R_\mathrm{N}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{M_\mathrm{M}}{M_\mathrm{E}}}+1 = \frac{R_\mathrm{EM}}{R_\mathrm{N}}$$

$$\Leftrightarrow R_\mathrm{N} = \frac{R_\mathrm{EM}}{\sqrt{\frac{M_\mathrm{M}}{M_\mathrm{E}}}+1} \tag{36}$$

Die benötigte Geschwindigkeit lässt sich nun aus der Energieerhaltung ableiten. Die Energie beim Abschuss auf der Erde muss gleich der Energie im neutralen Punkt sein.

Kinetische Energie beim Abschuss

$$E_\mathrm{kin} = \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{37}$$

potentielle Energie bezüglich des Erdschwerefeldes

$$E_\mathrm{pot,E}(r) = \int dr(-F_\mathrm{E}(r)) = G\frac{mM_\mathrm{E}}{r} \tag{38}$$

Verschiebe den Nullpunkt nun aus dem Unendlichen auf die Erdoberfläche

$$\begin{aligned}\Rightarrow \triangle\ E_{\text{pot,E}}(r) &= E_{\text{pot,E}}(R_{\text{E}}) - E_{\text{pot,E}}(R_{\text{E}}+r) = GmM_{\text{E}}\left(\frac{1}{R_{\text{E}}} - \frac{1}{R_{\text{E}}+r}\right) = \\ &= GmM_{\text{E}}\frac{r}{R_{\text{E}}(R_{\text{E}}+r)}\end{aligned} \tag{39}$$

potentielle Energie bezüglich des Mondschwerefeldes

$$E_{\text{pot,M}}(r) = \int drF_{\text{M}}(r) = G\frac{mM_{\text{M}}}{R_{\text{EM}}-r} \tag{40}$$

Verschiebe den Nullpunkt auf die Erdoberfläche

$$\begin{aligned}\Rightarrow \triangle\ E_{\text{pot,M}}(r) &= E_{\text{pot,M}}(R_{\text{E}}) - E_{\text{pot,M}}(R_{\text{E}}+r) = \\ &= GmM_{\text{M}}\frac{1}{R_{\text{EM}}-R_{\text{E}}} - \frac{1}{R_{\text{EM}}-R_{\text{E}}-r} = \\ &= GmM_{\text{M}}\frac{R_{\text{EM}}-R_{\text{E}}-r-R_{\text{EM}}+R_{\text{E}}}{(R_{\text{EM}}-R_{\text{E}}-r)(R_{\text{EM}}-R_{\text{E}})} = \\ &= -GmM_{\text{M}}\frac{r}{(R_{\text{EM}}-R_{\text{E}})^2 - r(R_{\text{EM}}-R_{\text{E}})}\end{aligned} \tag{41}$$

Die Gesamtenergie beim Abschuss ist nun

$$E_0 = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot,E}}(0) + E_{\text{pot,M}}(0) \tag{42}$$

und im neutralen Punkt

$$E_1 = E_{\text{pot,E}}(R_{\text{N}}-R_{\text{E}}) + E_{\text{pot,M}}(R_{\text{N}}-R_{\text{E}}) \tag{43}$$

Aufgrund der Energieerhaltung gilt $E_0 = E_1$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow E_{\text{kin}} + E_{\text{pot,E}}(0) + E_{\text{pot,M}}(0) = E_{\text{pot,E}}(R_{\text{N}}-R_{\text{E}}) + E_{\text{pot,M}}(R_{\text{N}}-R_{\text{E}}) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + E_{\text{pot,E}}(0) + E_{\text{pot,M}}(0) = E_{\text{pot,E}}(R_{\text{N}}-R_{\text{E}}) + E_{\text{pot,M}}(R_{\text{N}}-R_{\text{E}}) \\ &\Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\underbrace{-E_{\text{pot,E}}(0)}_{=0\text{ per Def.}}\underbrace{-E_{\text{pot,M}}(0)}_{=0\text{ per Def.}}+E_{\text{pot,E}}(R_{\text{N}}-R_{\text{E}}) + E_{\text{pot,M}}(R_{\text{N}}-R_{\text{E}})\right)} \\ &\Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2}{m}\Big(+ GmM_{\text{E}}\frac{R_{\text{N}}-R_{\text{E}}}{R_{\text{E}}(R_{\text{E}}+R_{\text{N}}-R_{\text{E}})} -} \\ &\overline{-GmM_{\text{M}}\frac{R_{\text{N}}-R_{\text{E}}}{(R_{\text{EM}}-R_{\text{E}})^2 - (R_{\text{N}}-R_{\text{E}})(R_{\text{EM}}-R_{\text{E}})}\Big)} \\ &\Leftrightarrow v_0 = \sqrt{2\left(+GM_{\text{E}}\frac{R_{\text{N}}-R_{\text{E}}}{R_{\text{E}}\cdot R_{\text{N}}} - GM_{\text{M}}\frac{R_{\text{N}}-R_{\text{E}}}{(R_{\text{EM}}-R_{\text{E}})^2 - (R_{\text{N}}-R_{\text{E}})(R_{\text{EM}}-R_{\text{E}})}\right)}\end{aligned} \tag{44}$$

Setze nun die Werte ein und berechne das Ergebnis

$$v_0 = 11{,}07\frac{\text{km}}{\text{s}} \tag{45}$$

Der Einfluss der Mondgravitation macht dabei einen sehr geringen Anteil aus. Lässt man den Term für die potentielle Energie des Mondes weg, so ergibt sich eine Mindestgeschwindigkeit, die um $10\frac{\text{m}}{\text{s}}$ höher ist.

Aufgabe 5

a) Er muss sich schneller bewegen als der Mond, da er eine größere Gravitationskraft ausgleichen muss.

b) Für eine stabile Bewegung muss gelten

$$\begin{aligned} F_{\text{Gravitation}} &= F_{\text{Zentripetal}} \qquad (46)\\ \Leftrightarrow G\frac{mM}{r^2} &= \frac{mv^2}{r} \\ \Leftrightarrow v &= \sqrt{\frac{GM}{r}} \\ \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} &= \sqrt{\frac{GMr_1}{r_2GM}} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \qquad (47) \end{aligned}$$

c) Drücke die Geschwindigkeit, die ja nur aus der Tangentialgeschwindigkeit besteht, durch die Periodendauer aus und setze das Ergebnis in Gleichung 47 ein.

$$\begin{aligned} v = \omega r = 2\pi f r &= \frac{2\pi f}{T} \qquad (48)\\ \overset{(48) in (47)}{\Longrightarrow} \frac{v_2}{V-1} &= \frac{2\pi r_2 T_1}{2T_2\pi r_1} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \\ \Leftrightarrow \frac{T_1}{T_2} &= \sqrt{\frac{r_1^3}{r_2^3}} \qquad (49) \end{aligned}$$

d) Setze die Angaben in Gleichung 49

$$\begin{aligned} \frac{T_{\text{sat}}}{T_{\text{mond}}} &= \sqrt{\frac{r_{\text{sat}}^3}{r_{\text{mond}}^3}} \\ \Rightarrow T_{\text{sat}} &= T_{\text{mond}}\sqrt{\frac{r_{\text{sat}}^3}{r_{\text{mond}}^3}} \\ T_{\text{sat}} &= 27 \cdot 24\text{h}\sqrt{\frac{6{,}370^3 \cdot 10^{18}\text{m}^3}{3{,}84^3 \cdot 10^{24}\text{m}^3}} = 1{,}4\text{h} \qquad (50) \end{aligned}$$

Aufgabe 6

a) Die Lösung folgt aus der Gültigkeit der Drehimpulserhaltung und der Energieerhaltung. Stelle zunächst eine Gleichung über die Gesamtenergie in diesem System auf:

$$E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \underbrace{-G\frac{Mm}{r}}_{\text{von } E_{\text{pot}} = -\int dr \cdot F} + \underbrace{\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2)}_{\text{Da } v^2 = v_r^2 + v_\phi^2 \text{ in Polarkoord.}} \tag{51}$$

Da E konstant ist muss die Differenz aus der Gesamtenergie im Perihel und der im Aphel 0 ergeben:

$$0 = -GM_S m\left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A}\right) + \frac{1}{2}m(r_P^2\dot{\phi}_P^2 - r_A^2\dot{\phi}_A^2 + \underbrace{\dot{r}_P^2 - \dot{r}_A^2}_{=0 \text{ da Radialbeschl. im Perihel u. Aphel } 0}) =$$

$$= -GM_S\left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A}\right) + \frac{1}{2}(v_P^2 - v_A^2) \tag{52}$$

Weiterhin gilt die Drehimpulserhaltung:

$$L = rp = mvr \tag{53}$$

Der Drehimpuls im Aphel entspricht dem im Perihel

$$\begin{aligned} mr_Pv_P &= mr_Av_A \\ \Leftrightarrow r_A &= \frac{r_Pv_P}{v_A} \end{aligned} \tag{54}$$

Setze nun Gleichung 54 in Gleichung 52 ein:

$$0 = -GM_S\left(\frac{1}{r_P} - \frac{v_A}{r_Pv_P}\right) + \frac{1}{2}(v_P^2 - v_A^2) \tag{55}$$

Löse mit Mitternachtsformel

$$v_A = \frac{\frac{-GM_S}{r_Pv_P} \pm \sqrt{\frac{G^2M_S^2}{r_P^2v_P^2} + 2\left(\frac{-GM_S}{r_P} + \frac{1}{2}v_P^2\right)}}{-1} \tag{56}$$

Einsetzen ergibt folgende 2 Lösungen

$$v_1 = 5{,}893 \cdot 10^3\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{57}$$

$$v_2 = 7 \cdot 10^4\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{58}$$

v_2 ist die Angabe der Geschwindigkeit im Perihel. Daher muss v_1 die Geschwindigkeit im Aphel sein. Setze v_1 in Formel 54 um r_A zu berechnen:

$$r_A = \frac{r_Pv_P}{v_A} = 5{,}939 \cdot 10^{11}\,\text{m} \tag{59}$$

Die Exzentrizität berechnet sich gemäß der Formel:

$$\epsilon = \frac{r_A - r_P}{r_A + r_P} = 0{,}845 \tag{60}$$

b) Offensichtlich steht bei Gleichung 60 im Zähler wie auch im Nenner die Einheit m. Daraus folgt unmittelbar, dass ϵ dimensionslos sein muss.