

- 1. Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinatensystemen:** Differentialoperatoren in **krummlinigen Koordinatensystemen** können mittels des sogenannten **metrischen Tensors** bestimmt werden. In drei Dimensionen gilt für die Elemente des metrischen Tensors die Beziehung $T_{ij}^2 = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_i} \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_j}$. Dabei sind die x_i z. B. die kartesischen Koordinaten x, y, z und die \bar{x}_i z. B. die Kugelkoordinaten r, ϑ, φ . Es gilt: $x_i = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$.

- a) Man zeige, dass T_{ij} für Kugelkoordinaten und Zylinderkoordinaten nur Diagonalelemente besitzt.
 b) Man bestimme den Laplace-Operator Δ in Kugel- und Zylinderkoordinaten gemäß der Beziehung

$$\Delta = \frac{1}{T_{11}T_{22}T_{33}} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} \left(\frac{T_{22}T_{33}}{T_{11}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} \left(\frac{T_{11}T_{33}}{T_{22}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{x}_3} \left(\frac{T_{11}T_{22}}{T_{33}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}_3} \right) \right]$$

(Lösung: Kugelkoordinaten: $\Delta = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$

Zylinderkoordinaten: $\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

- 2. Erwartungswerte der Eigenfunktionen des Wasserstoffatoms:** Man bestimme die Erwartungswerte $\langle r \rangle$ der **Abstände** eines **Elektrons** vom **Kern** eines **Wasserstoffatoms** für

- a) den σ_{1s} -Zustand, (Lösung: $\langle r \rangle = (3/2)a_0$)
 b) den σ_{2s} -Zustand, (Lösung: $\langle r \rangle = 6a_0$)
 c) den σ_{2p} -Zustand, (Lösung: $\langle r \rangle = 5a_0$)
 d) den π_{2p} -Zustand (Lösung: $\langle r \rangle = 5a_0$)

und setze diese in Relation zum **ersten Bohrschen Radius** a_0 .

- 3. Zeeman-Effekt und Spektroskopie:** Im **Magnetfeld** $B = 1 \text{ T}$ soll die **Zeeman-Aufspaltung** der **Wasserstoff-Balmer- α -Linie** ($2^2S_{1/2} \rightarrow 3^2P_{1/2}$) mit zwei verschiedenen Meßanordnungen beobachtet werden:

- a) Mit einem **Gitterspektrographen**. Wie groß muß das **spektrale Auflösungsvermögen** des Gerätes sein? Wie viele **Gitterstriche** müssen mindestens beleuchtet werden, wenn in der **zweiten Beugungsordnung** gemessen werden soll? (Lösung: $N > ca. 24500 \text{ Linien}$)
 b) Welches minimale Magnetfeld müßte vorhanden sein, um die Aufspaltung noch mit einem **Fabry-Perot-Interferometer** (Plattenabstand: $d = 1 \text{ cm}$, Reflexionsvermögen jeder Platte: $R = 95 \%$) zu beobachten? (Lösung: $B > 0.026 \text{ T}$)

Hinweis: $\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ JT}^{-1}$; die für die spektrale Auflösung charakteristischen Kenngrößen für den Gitterspektrographen und das Fabry-Perot-Interferometer sind aus der Literatur (z. B.: Demtröder) zu ermitteln.

- 4.** Die Wellenlänge der von einer Röntgen-Röhre erzeugten K_α -Strahlung wird zu $\lambda = 0,18 \text{ nm}$ gemessen.

- a) Welches chemische Element dient als Anodenmaterial? (Lösung: Kobalt ($Z = 27$))
 b) Welche Beschleunigungsspannung U muß an die Röhre angelegt werden, damit die charakteristische Strahlung mit der angegebenen Wellenlänge entsteht? (Lösung: $U = 6,9 \text{ kV}$)
 c) Wie groß muß die Beschleunigungsspannung mindestens sein, damit alle Röntgen-Linien angeregt werden? (Lösung: $U > 9,2 \text{ kV}$)