Praktische Mathematik 1
Lösung zu Übungsblatt 1

Daniel Weiss

16. Oktober 2009

1.1 $(e^x)' = e^x$

$$(e^{\ln t})' = \underbrace{e^{\ln t}}_{=t} \cdot (\ln t)'$$

$$(\ln t)' = \frac{(e^{\ln t})'}{t} = \frac{(t)'}{t} = \frac{1}{t}$$

□

1.2 Geometrisch gesehen ist das Bilden der Umkehrfkt. einer Fkt. f dasselbe wie eine Spiegelung (im $\mathbb{R}^2$ entlang der Geraden $g(x) = x$). Die Ableitung ist das Bilden der Tangente zu einer Funktion in einem best. Punkt. Geometrisch gesehen ist die Reihenfolge beider Operationen egal.

1.7 Mittlere quadr. Abweichung : $\sqrt{\varphi(a)}$

mit: $\varphi(a) = \sum_{i=0}^{5} \left[a \frac{i}{10} - \ln\left(1 + \frac{i}{10}\right) \right]^2$

Taschenrechner $\Rightarrow$ $a_0 = \text{bel.}$

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 0{,}95 \\ a_2 &= 0{,}91 \\ a_3 &= 0{,}87 \\ a_4 &= 0{,}84 \\ a_5 &= 0{,}81 \end{aligned}\right\} a \approx 0{,}87$$

PlusMa

2.1

1.3

a) $f(x) = x^3 \ln(x^2 - 2x + 5)$

$$f'(x) = 3x^2 \ln(x^2 - 2x + 5) + x^3 \frac{2x-2}{x^2-2x+5}$$

$$f'(1) = 3 \cdot \ln(4) + 0 = \underline{\underline{3\ln(4)}}$$

b) $f(x) = \sin^2(3x + \frac{\pi}{6})$

$$f'(x) = 3\cos(3x+\tfrac{\pi}{6})\sin(3x+\tfrac{\pi}{6}) + 3\cos(3x+\tfrac{\pi}{6})\sin(3x+\tfrac{\pi}{6})$$

$$f'(0) = 6\cos(\tfrac{\pi}{6})\sin(\tfrac{\pi}{6}) = 6\sqrt{\tfrac{3}{4}} \cdot \tfrac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{3}}{2}}}$$

1.4

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$\Leftrightarrow p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Laut Ableitungsregel: $(a_k x^k)' = a_k \cdot k \cdot x^{k-1} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$

und $(a_0)' = \underline{\underline{0}}$

$\cancel{\Rightarrow \left(\sum_{k=l}^{n} a_k x^k\right)' = \sum_{k=l+1}^{n} k a_k x^{k-1}}$

$$\Rightarrow p'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=l}^{n} a_k x^k\right)^{(i)} \underset{i \le l}{=} \sum_{k=l+i}^{n} \underbrace{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \ldots}\, \cdot a_k x^{k-i}$$

$$\Rightarrow p^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{n} k! a_k x^{k-n} = n!\, a_n x^0 = \underline{\underline{n!\, a_n}}$$

$\boxed{1.5}$

$y(t) = a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t)$

$y''(t) + \omega^2 y(t) = 0 \quad (1)$

$$\left.\begin{array}{l} y'(t) = a\omega \cos(\omega t) - b\omega \sin(\omega t) \\ y''(t) = -a\omega^2 \sin(\omega t) - b\omega^2 \cos(\omega t) \end{array}\right\} \to \text{in } (1):$$

$$-a\omega^2 \sin(\omega t) - b\omega^2 \cos(\omega t) + \omega^2 a \sin(\omega t) + \omega^2 b \cos(\omega t) = 0$$

$\square$

$\boxed{1.6}$ $f(x) = \ln(1+x)$

$f'(x) = \frac{1}{1+x}$

$\Rightarrow$ Konditionszahl $K_{abs} = \frac{1}{1+x} = f'(x)$

$$K_{rel} = \frac{f'(x)\, x}{f(x)} = \frac{\frac{x}{1+x}}{\ln(1+x)}$$

K_{abs} ist gut kond. für $x \approx 0$ und schlecht kond. für $x >> 0$.

K_{rel} ist sehr gut kond. für $x \approx 1$

denn $\frac{x}{(1+x)\ln(1+x)} \xrightarrow{bei\, x=0} \lim_{x \to 0} \frac{x}{(1+x)\ln(1+x)} =$

l'Hospital

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\ln(x+1) + \frac{x+1}{x+1}} = \frac{1}{\underbrace{\ln(1)}_{0} + 1} = 1$$

und schlechter für $x >> 0$

$\boxed{1.8}$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \, dt =$$

$$\int (UV)' = \int (U'V) + \int (UV') \Rightarrow \int (U'V) = \underbrace{\int (UV)'}_{UV} - \int (UV')$$

Partielle Int.

$$\stackrel{\text{}}{=} \Big[-\cos t \sin t\Big]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\pi/2} -\cos^2 t \, dt \stackrel{(\sin^2 t + \cos^2 t = 1)}{=} + \int_0^{\pi/2} 1 \, dt - \int_0^{\pi/2} dt \sin^2 t$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \, dt = t \Big|_0^{\pi/2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \, dt = \frac{\pi}{4}$$

$\boxed{1.9}$

$$\int_0^1 \cos(at+b) \, dt = \qquad (a \neq 0)$$

$$= \left[\frac{1}{a} \sin(at+b)\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{a} \sin(a+b) - \frac{1}{a} \sin(b) =$$

$$= \frac{\sin(a+b) - \sin(b)}{a}$$

$\boxed{1.10}$

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} \qquad \text{Subst:} \quad \sinh t := x$$

$$\frac{d \sinh t}{dt} = \cosh t$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = \int \sqrt{1+\sinh^2 t} \cosh t \, dt =$$

$$= \left| \underbrace{\sinh^2 t = \cosh^2 t - 1}_{} \right| = \int \sqrt{\cosh^2 t} \cosh t \, dt = \int \cosh^2 t \, dt =$$

Part. Int.

$$= \sinh t \cosh t - \int \sinh^2 t \, dt = \sinh t \cosh t - \int \cosh^2 t - 1 \, dt =$$

Resubst.

$$= \sinh t \cosh t - \int \cosh^2 t \, dt + t \Leftrightarrow \int \cosh^2 t \, dt = \frac{1}{2}(\sinh t \cosh t + t)$$

$$\stackrel{\text{Resubst.}}{\Leftrightarrow} \int \sqrt{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \operatorname{arsinh}(x) = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$