Grundlagen der Physik 1
Lösung zu Übungsblatt 2

Daniel Weiss

23. Oktober 2009

Aufgabe 1

Angaben:

- $v_F = 140\frac{\text{km}}{\text{h}}$
- $\alpha = 58°$
- $\beta = 195°$
- $v_W = 54\frac{\text{km}}{\text{h}}$

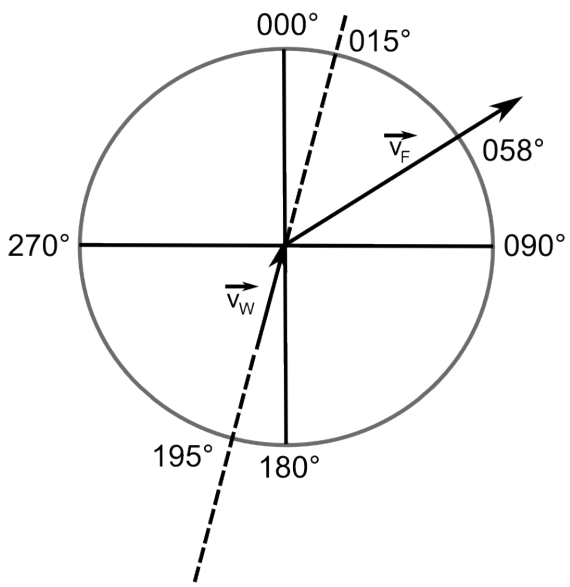

Abbildung 1: Skizze zu Aufgabe 1

a) Wie aus Abbildung 1 leicht ersichtlich ist, entspricht die Richtung des Windes einem Kompasskurs von $\delta = 015°$. Die beiden Geschwindigkeiten lassen sich nun vektoriell schreiben (1. Komponente entspricht der Ost-Richtung und 2. der Nord-Richtung):

$$\vec{v}_F = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \|\vec{v}_F\|_2 \tag{1}$$

$$\vec{v}_W = \begin{pmatrix} \sin(\delta) \\ \cos(\delta) \end{pmatrix} \cdot \|\vec{v}_W\|_2 \tag{2}$$

Die Gesamtgeschwindigkeit ist nunmehr der Betrag von $\vec{v}_F + \vec{v}_W$.

$$\begin{aligned}
\|\vec{v}_G\|_2 &= \|\vec{v}_F + \vec{v}_W\|_2 = \\
&= \sqrt{(\|\vec{v}_F\|_2 \cdot \sin(\alpha) + \|\vec{v}_W\|_2 \cdot \sin(\delta))^2 + (\|\vec{v}_F\|_2 \cdot \cos(\alpha) + \|\vec{v}_W\|_2 \cdot \cos(\delta))^2} = \\
&= \sqrt{(140\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \sin(58°) + 54\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \sin(15°))^2 +} \\
&\overline{+(140\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \cos(58°) + 54\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \cos(15°))^2} = \\
&= 183\frac{\text{km}}{\text{h}}
\end{aligned} \tag{3}$$

b) Über das Skalarprodukt ergibt sich der Winkel zur Nord-Richtung.

$$\vec{v}_G \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \|\vec{v}_G\|_2 \cdot \|1\|_2 \cdot \cos(\gamma) \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \gamma &= \arccos\left(\frac{\vec{v}_G \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\|\vec{v}_G\|_2}\right) = \\
&= \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix} 140\frac{\text{km}}{\text{h}} \cot \sin(58°) + 54\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \sin(15°) \\ 140\frac{\text{km}}{\text{h}} \cot \cos(58°) + 54\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \cos(15°) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{183\frac{\text{km}}{\text{h}}}\right) = \\
&= 46{,}4°
\end{aligned} \tag{5}$$

Aufgabe 2

Angaben:

- $v_0 = 0{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}}$
- $\alpha_0 = 60°$

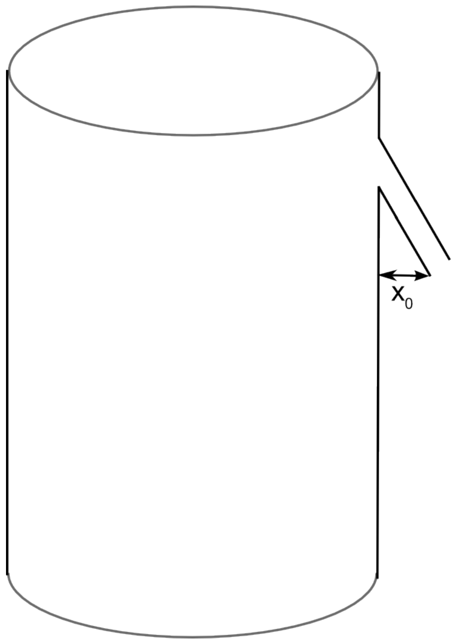

Abbildung 2: Skizze zu Aufgabe 2

- $h = 12\text{m}$
- $x_0 = 0{,}75\text{m}$

a) Wähle die 1. Komponente der Vektoren als Horizontale Achse und die 2. als Vertikale.

$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0{,}75 \\ 12 \end{pmatrix} \text{m} \tag{6}$$

$$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} \sin(\alpha_0) \\ \cos(\alpha_0) \end{pmatrix} \cdot v_0 \tag{7}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \qquad \text{konstant} \tag{8}$$

Mithilfe der bekannten Gleichungen für die Geschwindigkeit und Strecke in Abhängigkeit von t bei beschleunigter Bewegung (ergeben sich durch Integration von a) lassen sich die Bewegungsgleichungen aufstellen:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0{,}75 \\ 12 \end{pmatrix} \text{m} + \frac{1}{2} t^2 \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin(\alpha_0) \\ -\cos(\alpha_0) \end{pmatrix} v_0 t \tag{9}$$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \sin(\alpha_0) \\ -\cos(\alpha_0) \end{pmatrix} v_0 + t \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \tag{10}$$

b)

$$\text{Setze:} \qquad \vec{r}(t_{Fall}) = \begin{pmatrix} r_1(t_{Fall}) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

weil uns nur die vertikale Komponente interessiert

$$\Leftrightarrow 12\text{m} - \frac{1}{2} g t_{Fall}^2 - \cos(\alpha_0) v_0 t_{Fall} = 0 \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow t_{Fall1/2} &= \frac{\cos(\alpha_0) v_0 \pm \sqrt{\cos^2(\alpha_0) v_0^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} g \cdot 12\text{m}}}{-g} \\
&= -\frac{\cos(60°) \cdot 0{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}} \pm \sqrt{\cos^2(60°) \cdot 0{,}8^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 12\text{m}}}{9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_{Fall1} & = 1{,}52\text{s} \qquad \text{die ges. Lsg.} \\ t_{Fall2} & = -1{,}60\text{s} \qquad \text{phys. nicht sinnvoll} \end{cases} \tag{14}$$

c) Um die Entfernung x_1 zu Bestimmen, setze t_{Fall1} in $r_1(t)$ ein:

$$\begin{aligned}
r_1(t_{Fall1}) &= 0{,}75\text{m} - \sin(\alpha_0) v_0 t_{Fall1} \\
&= 0{,}75\text{m} + \sin(60°) \cdot 0{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1{,}52\text{s} = 1{,}80\text{m}
\end{aligned} \tag{15}$$

Aufgabe 3

Angaben:

- $v_{Anlauf} = 18\frac{\text{km}}{\text{h}} = 5\frac{\text{m}}{\text{s}}$
- $F_{Absprung} = 1000\text{N}$
- $dt_{Absprung} = 0{,}2\text{s}$
- $m = 57\text{kg}$
- $h = 1\text{m}$

a) Verwende Vektorschreibweise. Die erste Komponente sei die Horizontale und die zweite die Vertikale.

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{Res} &= \begin{pmatrix} v_{Anlauf} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{F_{Absprung}}{m} \end{pmatrix} dt_{Absprung} \\
&= \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1000}{57} \end{pmatrix} \underbrace{\frac{\text{N}}{\text{kg}}}_{= \frac{\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2}}{\text{kg}}} \cdot 0{,}2\text{s} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}
\end{aligned} \tag{16}$$

b) Analog zu den Umstellungen in Gleichungen 4 und 5 erhalten wir den Winkel über das Skalarprodukt. Diesmal interessiert uns allerdings der Winkel zur Horizontalen, also der 1. Komponente.

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{v}_{Res} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}{\|\vec{v}_{Res}\|_2}\right) = \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix}5\\3,5\end{pmatrix}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{5^2\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} + 3,5^2\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}}\right) = 35^\circ \tag{17}$$

c) Betrachte nur die Bewegung in vertikaler Richtung (also der 2. Komponente). Um die Flugzeit zu bestimmen stellt man die Bewegungsgleichung in vertikaler Richtung $s_{vertikal}(t)$ auf und löst nach t.

$$\begin{aligned} s_{vertikal}(t) = {} & \underbrace{v_{vertikal}t}_{\text{Anfangsgeschw. kommt von } v=\frac{s}{t}} - \underbrace{\frac{1}{2}gt^2}_{\text{beschl. Bew. durch Erdanziehung}} + \\ & + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{F_{Absprung}}{m} - g\right) dt^2_{Absprung}}_{\text{Versatz durch Anfangsbeschl.}} + \underbrace{1\mathrm{m}}_{\text{Schwerpunktsversatz}} \end{aligned} \tag{18}$$

Der letzte Term kommt dadurch zustande, dass der Schwerpunkt der Springerin beim Abspringen 1m über dem Boden ist und beim Landen den Boden berührt. Der vorletzte Term entsteht durch die Anfangsbeschleunigung beim Absprung. Man kann sich vorstellen, dass die Springerin instantan beschleunigt und dann die ersten beiden Terme die Bewegungsgleichung darstellen. Dann muss aber die Strecke, die sie während der Beschleunigungsphase zurückgelegt hat noch dazuaddiert werden. Diese Formel gilt also nur für $t > dt_{Absprung}$!
Auflösen nach t liefert mit der Mitternachtsformel das Ergebnis:

$$\begin{aligned} t_{1/2} &= \frac{-v_{vertikal} \pm \sqrt{v^2_{vertikal} + 4 \cdot \frac{1}{2}g \cdot (\frac{1}{2}\left(\frac{F_{Absprung}}{m} - g\right) dt^2_{Absprung} + 1\mathrm{m})}}{-2 \cdot \frac{1}{2} \cdot g} = \\ &= \frac{3,5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \pm \sqrt{3,5^2\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9,81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (\frac{1}{2}\left(\frac{1000\mathrm{N}}{57\mathrm{kg}} - 9,81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) \cdot 0,2^2\frac{m^2}{s^2} + 1\mathrm{m})}}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9,81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} \\ &\Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0,96\mathrm{s} \\ t_2 = -0,25\mathrm{s} & \text{phys. nicht sinnvoll} \end{cases} \end{aligned} \tag{19}$$

Die Lösung auf dem Angabenblatt lautet $t = 0,9s$. Auf diesen Wert kommt man durch vernachlässigen der Beschleunigungsphase, also $a = \infty$ und $dt_{Absprung} = 0$.

d) Die Bewegung in horizontaler Richtung erfolgt mit konstanter Geschwindigkeit. Es ergibt sich:

$$s_{horizontal} = v_{horizontal}t_{Flugzeit} = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 0,96\mathrm{s} = 4,80\mathrm{m} \tag{20}$$

Die Geschwindigkeit wurde in Gleichung 16 bereits berechnet. Die Zeit in Gleichung 19. Auch hier weicht mein Ergebnis von der Lösung im Angabenblatt ab, weil ich mit einer etwas anderen Zeit gerechnet habe. Zur näheren Begründung siehe Ende Aufgabe 3c).

Aufgabe 4

a) Es handelt sich um eine beschleunigte Bewegung. Es gilt daher:

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + s_0 \tag{21}$$

$$v(t) = gt + v_0 \Leftrightarrow t(v) = \frac{v - v_0}{g} \tag{22}$$

Setze nun die Angabe der Geschwindigkeit in Gleichung 22 und berechne damit t_{Fall} (v_0 sei 0).

$$t_{Fall} = t(100\frac{\text{km}}{\text{h}}) = t(27{,}\overline{7}\frac{\text{m}}{\text{s}}) \tag{23}$$

Dann setze t in Gleichung 21 und berechne mit der Startbedingung $s(t_{Fall}) = 0$ die Starthöhe s_0.

$$s(t_{Fall}) = \frac{1}{2}g\frac{v^2}{g^2} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{g} = \frac{1}{2} \cdot \frac{27{,}\overline{7}^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 39{,}33\text{m} \tag{24}$$

b) Das Problem ist recht ähnlich dem in Teilaufgabe a). Es kommt jedoch eine zusätzliche Beschleunigung a des Aufzugs hinzu.

Aus Gleichung 21 wird hier:

$$s(t) = \frac{1}{2}(g - a)t^2 \Leftrightarrow t(s) = \sqrt{\frac{2s}{g - a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3\text{m}}{9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 1{,}6\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 0{,}85\text{s} \tag{25}$$

Aufgabe 5

a) Die Bewegungsgleichungen sind ähnlich wie in Gleichungen 9 und 10 - jedoch ist der Winkel anders, weshalb sich Kosinus und Sinus vertauschen. Siehe auch Skizze auf Angabenblatt (Aufg. 6).

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 0 && (26)\\
y_0 &= 0 && (27)\\
x(t) &= \cos(\alpha)\cdot v_0\cdot t \Leftrightarrow t(x) = \frac{x}{\cos(\alpha)\cdot v_0} && (28)\\
y(t) &= \sin(\alpha)\cdot v_0\cdot t - \frac{1}{2}gt^2 && (29)\\
&\Rightarrow y(x) = v_0\sin(\alpha)\frac{x}{v_0\cdot\cos(\alpha)} - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{\cos^2(\alpha)\cdot v_0^2}\\
&= x\tan(\alpha) - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{\cos^2(\alpha)\cdot v_0^2} && (30)
\end{aligned}
$$

b)

Setze $P_1(6|1{,}5)$ in Gleichung 30

$$
\begin{aligned}
1{,}5\text{m} &= 6{,}0\text{m}\cdot\tan(45°) - \frac{1}{2}\cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\frac{6{,}0^2\text{m}^2}{v_0^2\cdot\cos(45°)}\\
\Rightarrow v_0 &= \sqrt{\frac{1}{2}\cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot\frac{6{,}0^2\text{m}^2}{4{,}5\text{m}\cdot 2}} = 8{,}86\frac{\text{m}}{\text{s}} && (31)
\end{aligned}
$$

c) Der Ball soll in horizontaler Richtung in P_1 einlaufen. Das bedeutet, dass die Ableitung von Formel 30 in diesem Punkt 0 sein muss.

$$
\begin{aligned}
&y'(x) = tan(\alpha) - g\cdot\frac{x}{v_0^2\cdot\cos^2(\alpha)} && (32)\\
\text{Setze}\quad &y'(x) = 0 \Leftrightarrow \tan(\alpha) = \frac{g\cdot x}{v_0^2\cdot\cos^2(\alpha)} && (33)\\
&\Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{xg}{\tan(\alpha)\cos^2(\alpha)}} = \sqrt{\frac{xg}{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}} && (34)
\end{aligned}
$$

Setze nun P_1 und das Ergebnis von Gleichung 34 in Gleichung 30 ein und forme nach α um:

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_1 \cdot \tan(\alpha) - \frac{1}{2} g \frac{x_1^2}{v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \\
\text{mit Gl. 34: } y_1 &= x_1 \cdot \tan(\alpha) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x_1^2 \cdot \sin(\alpha)\cos(\alpha)}{\cos^2(\alpha) \cdot x_1 \cdot g} = \\
&= x_1 \cdot \tan(\alpha) - \frac{1}{2} \cdot \frac{x_1 \cdot \sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{x_1}{\tan(\alpha)} \\
&\Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{y_1}{\frac{1}{2} \cdot x_1}\right) = \arctan\left(\frac{1{,}5\text{m}}{3{,}0\text{m}}\right) = 26{,}57° \qquad (35) \\
&\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{6{,}0\text{m} \cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\sin(26{,}57°) \cdot \cos(26{,}57)°}} = 12{,}13\frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad (36)
\end{aligned}$$

Aufgabe 6

Kurze Vorbemerkung. Zur Vereinfachung kann die Reflexion des Balles ignoriert werden und stattdessen eine “normal” verlaufende Bahnkurve angenommen werden. Dies betrifft vor allem Teilaufgabe b. Diese Bahnkurve kann nun in n Schnipsel der Breite d unterteilt werden, was die Menge der Punkte P_n liefert.
Generell betrachten wir nur das Intervall $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$!

a) Dieses Problem ist ähnlich zu dem in der vorigen Aufgabe. Die Bahngleichung 30 kann direkt übernommen werden.

$$y(x) = x\tan(\alpha) - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{\cos^2(\alpha) \cdot v_0^2} \qquad (37)$$

Berechne den x-Wert für $y(x) = 0$, also den Auftreffpunkt des Balles am Boden

$$\begin{aligned}
y(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot \tan(\alpha) &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \\
x &= \frac{2v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \tan(\alpha)}{g} \qquad (38)
\end{aligned}$$

Es gilt nun offensichtlich die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&x < d \qquad (39) \\
&\Rightarrow \underbrace{2\cos^2(\alpha)\tan(\alpha)}_{=\sin(2\alpha)} < \frac{dg}{v_0^2} \qquad (40)
\end{aligned}$$

Fall 1:

$$dg > v_0^2 \tag{41}$$
$$\Rightarrow \sin(2\alpha) < \frac{dg}{v_0^2} \qquad \forall \alpha : \frac{-\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \tag{42}$$

Fall 2:

$$dg < v_0^2 \tag{43}$$
$$\Rightarrow \alpha < \frac{\arcsin\left(\frac{dg}{v_0^2}\right)}{2} \tag{44}$$

Gleichung 44 hat genau 2 Lösungen, da der Sinus "mit doppelter Frequenz läuft" - siehe Abbildung 3.

Fall 3 ($dg = v_0^2$) führt unweigerlich zu einem Winkel von $\alpha = 45°$. Diesen Fall möchte ich aber nicht betrachten, da er als Grenzfall genau dann eintritt, wenn der Ball genau auf die Ecke der Brunnenwand trifft. Hier lässt sich drüber streiten, ob er dann in den Brunnen fällt oder nicht. Bei mir tut er das nicht!

$$\tag{45}$$

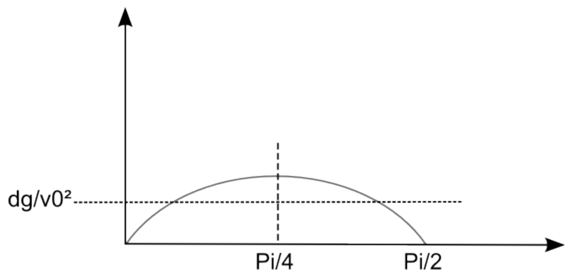

Abbildung 3: Skizze der "gestauchten" Sinusfunktion

b)

Für alle Auftreffpunkte gilt:

$$x_n = n \cdot d, n \in \mathbb{N} \tag{46}$$

Setze nun ein: $P_n(x_n|y_n)$

$$\Rightarrow P_n\left(n \cdot d \middle| n \cdot d \cdot \tan(\alpha) - \frac{1}{2} g \frac{n^2 \cdot d^2}{v_0^2 \cdot \cos(\alpha)}\right) \tag{47}$$

Berücksichtigen wir die Spiegelung, so ändert sich lediglich die x-Komponente:

$$\Rightarrow P_n\left(\frac{d}{2}+\frac{(-1)^{n+1}\cdot d}{2}\middle| n\cdot d\cdot\tan(\alpha)-\frac{1}{2}g\frac{n^2\cdot d^2}{v_0^2\cdot\cos(\alpha)}\right) \tag{48}$$