Grundlagen der Physik 1
Lösung zu Übungsblatt 6

Daniel Weiss

20. November 2009

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1

Die einzige wirkende Kraft ist die Gravitationskraft. Sie wirkt sowohl auf m_1 als auch auf m_2. Die träge Masse, also die zu beschleunigende Masse beträgt jedoch beidesmal

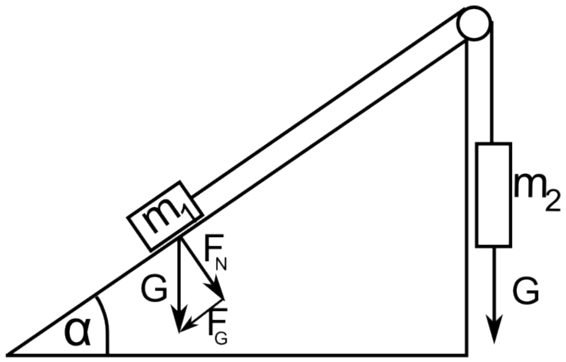

Abbildung 1: Bewegung auf schiefer Ebene

$M = m_1 + m_2$. Die Kraft auf m_1 ist:

$$F_{\mathrm{G1}} = -m_1 g \sin(\alpha) \tag{1}$$

und die auf m_2:

$$F_{\mathrm{G2}} = m_2 g \tag{2}$$

Die Gesamtbeschleunigung folgt nun aus der Addition der beiden Teilbeschleunigungen:

$$a = \frac{F_{\mathrm{G1}} + F_{\mathrm{G2}}}{m_1 + m_2} = \frac{g(m_2 - m_1 \sin(\alpha))}{m_1 + m_2} \tag{3}$$

Berechne die Zeit über die Strecke-Beschleunigung-Beziehung

$$s = \frac{1}{2} a t^2 \tag{4}$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s(m_1 + M_2)}{g(m_2 - m_1 \sin(\alpha)}} \tag{5}$$

Aufgabe 2

a) Hier gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder über den Ansatz $v(t) = at$ und $s(t) = \frac{1}{2}at^2$, was dann zusammen mit $a = g\sin(\alpha)$ die Gleichung $v(L) = \sqrt{2g\sin(\alpha) \cdot L}$ liefert oder - kürzer - über die Energieerhaltung. Das NN der potentiellen Energie wird so gewählt, dass am Anfang nur potentielle Energie vorhanden ist und am Ende nur kinetische. Dann folgt aus der Gleichsetzung der beiden Energiegleichungen direkt die Gleichung für v.

$$E_1 = mg\sin(\alpha) \tag{6}$$

$$E_2 = \frac{1}{2}mv^2 \tag{7}$$

$$E_1 = E_2$$

$$\Rightarrow v(L) = \sqrt{2gL\sin(\alpha)} \tag{8}$$

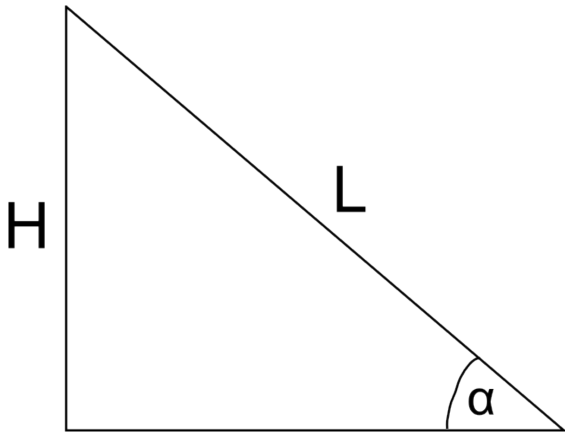

Abbildung 2: Schiefe Ebene - Gleiten und Rollen

b) Auch hier gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder über die Bewegungsgleichungen, die den Drehimpuls berücksichtigen ($\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{D}$) oder über die Energieerhaltung. Wähle NN so, dass zu Beginn nur potentielle Energie und zum Zeitpunkt t nur kinetische Energie vorhanden ist.

$$E_1 = mgL\sin(\alpha) \tag{9}$$

$$E_2 = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{kin. Energie des Schwerpunkts}} + \underbrace{\frac{1}{2}I\omega^2}_{\text{kin. Energie der Drehbew.}} \tag{10}$$

mit $\omega = \frac{v}{r}$ und $E_1 = E_2$

$$mgL\sin(\alpha) = \frac{1}{2}(mv^2 + I\frac{v^2}{R^2}) \tag{11}$$

Sei R der Radius und m die Masse der Kugel mit homogener Dichteverteilung. Kurzer Einschub: Berechnung des Trägheitsmoments I der Kugel bei einer Drehung um den Schwerpunkt der Kugel.

Allgemein: $I = \int dm \cdot a^2 = \rho \int_V dV \cdot a^2$ wobei a der senkrechte Abstand jedes Punktes zur Drehachse ist.

Betrachte das Problem in Kugelkoordinaten

$$
\begin{aligned}
I_{\mathrm{S}} &= \rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{R} dr \cdot r^2 \sin(\theta) \cdot \underbrace{r^2 \sin^2(\theta)}_{=a} = \\
&= \rho \cdot 2\pi \int_0^{\pi} d\theta \frac{1}{5} R^5 \sin^3(\theta) = \\
&= \rho \cdot 2\pi \frac{1}{5} R^5 \left[\frac{\cos^3(\theta)}{3} - \cos(\theta) \right]_0^{\pi} = \\
&= \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \cdot \frac{2}{5} R^2 = \frac{2}{5} m R^2
\end{aligned} \tag{12}
$$

Mit Gleichung 11 folgt nun die Gleichung für $v(L)$:

$$
\begin{aligned}
mgL\sin(\alpha) &= \frac{1}{2}(mv^2 + \frac{2}{5} mR^2 \cdot \frac{v^2}{R^2}) \\
mgL\sin(\alpha) &= \frac{1}{2}(mv^2 + \frac{2}{5} m \cdot v^2) \\
mgL\sin(\alpha) &= \frac{7}{10} m \cdot v^2 \\
\frac{10mgL\sin(\alpha)}{7m} &= v^2 \\
\sqrt{\frac{10gL\sin(\alpha)}{7}} &= v(L)
\end{aligned} \tag{13}
$$

c) Offensichtlich ist $v_{\text{rollende Kugel}} < v_{\text{gleitende Masse}}$. Die Gesamtenergie ist zu Beginn und nach der Zeit t gleich. Bei der Kugel geht jedoch ein Teil der potentiellen Energie in die Rotationsenergie über; somit ist die Bewegungsenergie bezüglich der Translation des Schwerpunktes geringer als bei der gleitenden Masse, die nicht rotiert.

Aufgabe 3

a) Bei der Explosion entstehen zwei Teilstücke mit derselben Masse. Die Beschleunigungskräfte der Explosion wirken auf beide Stücke in gleicher Weise und beschleunigen beide (aufgrund der gleichen Teilmassen) in einer infinitesimalen Zeitspanne auf gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeiten. Gesucht ist der Auftreffpunkt des zweiten Teilstücks bei bekanntem Auftreffpunkt des ersten. Das Problem kann durch geeignete Wahl des Koordinatensystems zweidimensional mit der Y-Achse in senkrechter Richtung und der x-Achse in waagrechter Richtung beschrieben werden, da der Auftreffpunkt des ersten Teilstücks genau senkrecht unter dem Explosionsort liegt.

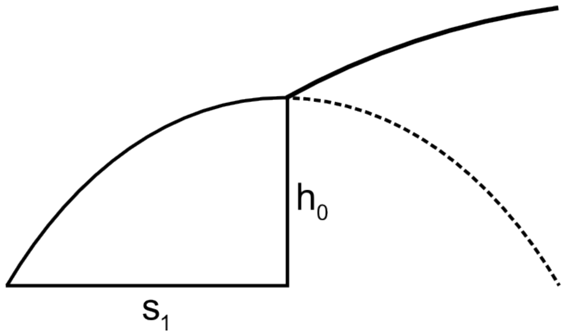

Abbildung 3: Explosion im Scheitelpunkt

Geschwindigkeit-Ort-Gleichungen des Geschosses kurz vor der Explosion

$$\dot{y}_0 = 0 \tag{14}$$

Daraus folgt, dass die Geschwindigkeit in y-Richtung beim Abschuss genauso groß war, als wenn der Körper von der Höhe h_0 im freien Fall nach unten gefallen wäre.

$$0 = \frac{1}{2}gt_1^2 - h_0 \tag{15}$$

$$\Rightarrow t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \tag{16}$$

$$\Rightarrow \dot{x}_0 = \frac{s_1}{\sqrt{\frac{2h_0}{g}}} \tag{17}$$

Geschwindigkeit-Ort-Gleichungen des ersten Teilstücks unmittelbar nach der Explosion

$$\dot{x}_1 = 0 \tag{18}$$

$$0 = -\frac{1}{2}gt_1^2 - \dot{y}_1 t_1 \tag{19}$$

$$\Rightarrow \dot{y}_1 = \frac{1}{2}gt_1 - \frac{h_0}{t_1} \tag{20}$$

Die des zweiten Teilstücks

$$\dot{x}_2 = 2\dot{x}_0 = 2\frac{s_1}{\sqrt{\frac{2h_0}{g}}} \tag{21}$$

$$\dot{y}_2 = -\dot{y}_1 = -\frac{1}{2}gt_1 + \frac{h_0}{t_1} \tag{22}$$

Setze nun die y-Komponente in der Bewegungsgleichung (y-Richtung) des zweiten Teilstücks 0 und berechne die Flugzeit ab der Explosion. Setze dann in die Bewegungsgleichung in x-Richtung ein und berechne die horizontale Flugstrecke ab der Explosion. Durch Addition der Entfernung des ersten Teilstücks erhält man schließlich die Entfernung des zweiten Teilstücks von dem Abschusspunkt.

$$0 = -\frac{1}{2}gt_2^2 - \dot{y}_1 t_2 + h_0 \tag{23}$$

$$t_2 = \frac{-\dot{y}_1 + \sqrt{\dot{y}^2 + 2gh_0}}{g} \tag{24}$$

$$\Rightarrow x_2 = \dot{x}_2 t_2 = 3921\mathrm{m} \tag{25}$$

$$\Rightarrow s_2 = s_1 + x_2 = 4921\mathrm{m} \tag{26}$$

b) Die Impulserhaltung gilt - auch wenn bei der Explosion ein Stück der Masse in Energie umgewandelt wurde! Einzige Bedingung ist, dass beide Teilstücke gleich viel Energie aufnehmen und es keine weiteren Splitterstücke gibt oder diese Splitterstücke homogen in alle Richtungen gleich verteilt sind. Der Anfangsimpuls im Schwerpunktsystem (freier Fall = Inertialsystem) ist 0. Da die beiden Teilgeschwindigkeiten hinterher gleich groß, aber entgegengerichtet sind und die Teilmassen gleich groß sind, ist der Impuls im Schwerpunktsystem nach der Explosion ebenfalls 0. Der IES gilt also.

Aufgabe 4

a)

$$\vec{p} = 1\mathrm{kg}\begin{pmatrix}2{,}8\\-3{,}0\end{pmatrix}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 0{,}4\mathrm{kg}\begin{pmatrix}0\\7{,}5\end{pmatrix}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \begin{pmatrix}2{,}8\\0\end{pmatrix}\frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}} \tag{27}$$

b)

$$\vec{v}_\mathrm{S} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{2} m_i v_i = \frac{1}{M}\vec{p} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{28}$$

c)

$$\vec{p} = 1\mathrm{kg}\begin{pmatrix}-0{,}8\\-2{,}0\end{pmatrix}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 0{,}4\mathrm{kg}\begin{pmatrix}2{,}0\\5{,}0\end{pmatrix}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}} \tag{29}$$

d)

$$E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \tag{30}$$

$$E_2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2 \tag{31}$$

$$1 - \frac{E_2}{E_1} = 49{,}4\% \tag{32}$$

e) Nein, da kinetische Energie in Wärme umgewandelt wird.

Aufgabe 5

a) Es gilt die Energieerhaltung:

$$E_1 = m_1 g H \tag{33}$$
$$E_2 = \frac{1}{2} m_1 v^2 \tag{34}$$
$$\Rightarrow v = \sqrt{2gH} = 15{,}3\mathrm{m} \tag{35}$$

b) Impulserhaltung:

$$p_1 = m_1 v_1 \tag{36}$$
$$p_2 = (m_1 + m_2) v_2 \tag{37}$$
$$\Rightarrow v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 7{,}3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{38}$$

c) Energieerhaltung

$$E_1 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 \tag{39}$$
$$E_2 = (m_1 + m_2) g H \tag{40}$$
$$\Rightarrow H_2 = \frac{1}{2} g v_2^2 = 2{,}6\mathrm{m} \tag{41}$$

d) Berechne zunächst die nötige Geschwindigkeit des ersten Wagens vor dem Stoß (IES):

$$p_1 = m_1 v_1 \tag{42}$$
$$p_2 = (m_1 + m_2) v_2 \tag{43}$$
$$\Rightarrow v_1 = \frac{(m_1 + m_2) v_2}{m_1} \tag{44}$$

Nun noch die Energieerhaltung:

$$E_1 = m_1 g H + \frac{1}{2} m_1 v^2 \tag{45}$$
$$E_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \tag{46}$$
$$\Rightarrow v \geq \sqrt{v_1^2 - 2gH} = 28{,}2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{47}$$

Aufgabe 6

a) Impulserhaltung

$$p_1 = m_1 v_1 - (M_T - m_1) v_p \text{ mit } v_P > 0 \tag{48}$$

$$p_2 = (m_1 - M_P) v_2 - (M_T - m_1 + M_P) v_P \tag{49}$$

$$p_1 = p_2 \Rightarrow -v_P M_P = m_1 v_1 - (m_1 - M_P) v_2$$

$$\Leftrightarrow v_2 = \frac{M_P v_P + m_1 v_1}{m_1 - M_P} \tag{50}$$

b) Tabelle der Ergebnisse

Wert	Diskret $[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$	Analytisch $[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$
v_R^0	0,00	0,00
v_R^1	0,05	0,05
v_R^2	0,10	0,10
v_R^3	0,15	0,15
v_R^4	0,20	0,20
v_R^5	0,2505	0,2506

Die Abweichungen sind jeweils minimal und meist kleiner als ein Tausendstel.