2.7 Aufgaben

Aufgabe 2.1 : Man bestimme eine Gleichung für die Menge aller Punkte (x, y, z), die von $(-1, 0, 2)$ den Abstand 3 haben.

(*Lösung :* $(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9$)

Aufgabe 2.2 : Man bestimme eine Gleichung für die Menge aller Punkte (x, y, z), die von $(1, 0, 0)$ und $(2, 1, 1)$ denselben Abstand haben.

(*Lösung :* $2x + 2y + 2z = 5$ ... Ebene)

Aufgabe 2.3 : Man bestimme eine Gleichung für die Menge aller Punkte (x, y, z), die von $(3, 4, 5)$ und von der yz - Ebene denselben Abstand haben.

(*Lösung :* $(y-4)^2 + (z-5)^2 = 6x - 9$)

Aufgabe 2.4 : Ein Massepunkt bewegt sich, ausgehend vom Ursprung, 2 cm in die Richtung des Vektors $(1, 1, 1)$, dann 5 cm in die negative x - Richtung, und schließlich 3 cm in die Richtung des Vektors $(2, 1, -2)$. Man bestimme die Koordinaten des Massepunktes am Ende der Bewegung.

(*Lösung :* $(2-3\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}, 2-2\sqrt{3})/\sqrt{3}$, in cm)

Aufgabe 2.5 : Die Bahn eines Massepunktes ist gegeben durch $\boldsymbol{r}(t) = (t^2 + 7, 2\,t^3 - 1, t)$. Man berechne die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 1$.

(*Lösung :* $\boldsymbol{v}(1) = \boldsymbol{r}'(1) = (2, 6, 1)$, $|\boldsymbol{v}(1)| = \sqrt{41}$)

Aufgabe 2.6 : Die Geschwindigkeit eines Massepunktes ist gegeben durch $\boldsymbol{v}(t) = (1, t, 3\,t^2)$, und seine Position zum Zeitpunktes $t = 0$ ist $\boldsymbol{r}(0) = (1, 0, 1)$. Man bestimme die Bahn des Massepunktes.

(*Lösung :* $\boldsymbol{r}(t) = (t+1,\ t^2/2,\ t^3+1)$)

Aufgabe 2.7 : Man bestimme zwei Darstellungen für die Tangente an die Bahnkurve aus der vorhergehenden Aufgabe zum Zeitpunkt $t=2$; einerseits durch eine Parameterdarstellung als geradlinig-gleichförmige Bewegung, andererseits durch zwei Gleichungen für die x -, y - und z - Koordinaten.

(*Lösung :* $\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -15 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$, bzw. $2\,x - y = 4,\ 6\,y - z = 3$)

Aufgabe 2.8 : Man interpretiere die beiden Gleichungen aus der Lösung der vorhergehenden Aufgabe als Darstellungen von Ebenen und bestimme jeweils einen Punkt auf diesen Ebenen sowie die Normalvektoren.

(*Lösung :* z.B. $P = (0, -4, 0)$, $\boldsymbol{n} = (2, -1, 0)$; $P = (0, 0, -3)$, $\boldsymbol{n} = (0, 6, -1)$)

Aufgabe 2.9 : Eine Ebene enthält den Punkt $(1, 1, 1)$ und hat den Normalvektor $(2, 0, -1)$. Eine Gerade enthält den Punkt $(1, 0, 1)$ und hat den Richtungsvektor $(0, 3, 1)$. Man berechne den Schnittpunkt der Ebene mit der Geraden.

(*Lösung :* $P = (1, 0, 1)$)

Aufgabe 2.10 : Man berechne den Abstand der Ebene aus Aufgabe 2.9 vom Ursprung.

(*Lösung :* $\sqrt{5}/5$)

Aufgabe 2.11 : Man berechne den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten $(-2, 1)$, $(1, 0)$ und $(0, 4)$ mit Hilfe einer Determinante.

(*Lösung :* $11/2$)

Aufgabe 2.12 : Eine Ebene enthält die drei Punkte $(2, 1, 5)$, $(3, 3, 3)$ und $(0, 2, 0)$. Man finde eine Gleichung für die Punkte in der Ebene.

(*Lösung :* $8\,x - 9\,y - 5\,z = -18$)

Aufgabe 2.13 : * Man berechne den Drehimpuls um den Ursprung für einen Massepunkt, der sich entlang der Bahn $\boldsymbol{r}(t) = (a\,\cos t, b\,\sin t, 0)$ bewegt.

(*Lösung :* $\boldsymbol{L}(t) = m\,a\,b\,\cdot\,(0, 0, 1) = \text{const.};\ \ \text{m} \ldots\ \textit{Masse}$)

Aufgabe 2.14 : Man bestimme eine Parameterdarstellung für die Schnittgerade der beiden Ebenen mit den Gleichungen $x + y - 3z = 1,\ 4x - 3y + z = 0$.

(*Lösung :* $\boldsymbol{r}(t) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{7}\begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}$)

Aufgabe 2.15 : * Man berechne den Abstand zwischen den Geraden mit den Parameterdarstellungen $(x, y, z) = (1, 0, 0) + t\,(2, 4, 1)$ und $(x, y, z) = s\,(0, 1, 0)$.

(*Lösung :* $\sqrt{5}/5$)

Aufgabe 2.16 : Man berechne das Volumen des Parallelepipeds, das von den Vektoren $(1, 1, 1)$, $(2, 2, 5)$ und $(0, 4, 7)$ aufgespannt wird.

(*Lösung :* 12)