# Praktische Mathematik 1
# Lösung zu Übungsblatt 2

Daniel Weiss

26. Oktober 2009

## Aufgabe 2.1

Alle Punkte mit Abstand 3 von $A(-1|0|2)$ liegen auf einer Kugel mit Radius $r = 3$ um $A$. Nenne alle diese Punkte $P(x|y|z)$ und benutze die Bedingung für den Abstand:

$$\|\vec{p} - \vec{a}\|_2 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2} = 3 \tag{1}$$

In der vorgegebenen Lösung wurde dieses Ergebnis noch quadriert um die Wurzel weg zu bekommen:

$$\Leftrightarrow (x+q)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 9 \tag{2}$$

## Aufgabe 2.2

Gegeben sind die Punkte $A(1|0|0)$ und $B(2|1|1)$. Alle Punkte mit gleichem Abstand zu beiden Punkten liegen auf einer Ebene mit Normalenvektor:

$$\vec{n} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\Rightarrow E : x_1 + x_2 + x_3 = c \tag{4}$$

Der Punkt $D$, der genau zwischen $A$ und $B$ liegt, ist auch in der Ebene $E$.

$$\vec{d} = \vec{a} + \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$D \in E \Rightarrow \frac{3+1+1}{2} = \frac{5}{2} = c \Rightarrow E : 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \tag{6}$$

## Aufgabe 2.3

Gegeben ist Punkt $A(3|4|5)$ und die Ebene $E : x = 0$(y-z-Ebene). Gesucht sind alle Punkte $P(x|y|z)$ mit $d(P,E) = d(P,A)$

$$d(P,E) = x \tag{7}$$

$$d(P,A) = \sqrt{(3-x)^2 + (4-y)^2 + (5-z)^2} \tag{8}$$

$$\Rightarrow x^2 = 9 - 6x + x^2 + (4-y)^2 + (5-z)^2 \tag{9}$$

$$\Leftrightarrow 6x - 9 = (4-y)^2 + (5-z)^2$$

## Aufgabe 2.4

Gegeben sind die Vektoren $v_1 = (1,1,1)^T$, $v_2 = (-1,0,0)^T$ und $v_3 = (2,1,-2)^T$. Laut Angabe gilt folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
&2\text{cm}\frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|_2} + 5\text{cm}\frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|_2} + 3\text{cm}\frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|_2} = \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\text{cm} + \frac{3}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\text{cm} + 5\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\text{cm} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}2-3\sqrt{3}\\2+\sqrt{3}\\2-2\sqrt{3}\end{pmatrix}\text{cm}
\end{aligned} \tag{10}$$

## Aufgabe 2.5

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix}t^2+7\\2t^3-1\\t\end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \begin{pmatrix}2t\\6t^2\\1\end{pmatrix} \tag{12}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(1) = \begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix} \text{und} \|\vec{v}\|_2 = \sqrt{4+36+1} = \sqrt{41}$$

## Aufgabe 2.6

Mit

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix}1\\t\\3t^2\end{pmatrix} \tag{13}$$

und

$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

folgt direkt

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t) dt = \begin{pmatrix} t+1 \\ \frac{1}{2}t^2 \\ t^3+1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

In Gleichung 15 wurden bereits die Komponenten von $\vec{r}(0)$ als Integrationskonstanten eingesetzt

$$\tag{16}$$

## Aufgabe 2.7

i) Tangente in Parameterschreibweise

$$\vec{v}(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$\vec{r}(2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Daraus ergibt sich die Tangente bei $t = 2$:

$$\vec{r}_{tangente}(t) = r_{tangente}(0) + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} \tag{19}$$

$$\vec{r}(2) = \vec{r}_{tangente}(2) \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -15 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{tangente}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -15 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} \tag{20}$$

ii) Aus Teil i) erhalten wir die drei Gleichungen für $x$,$y$ und $z$.

$$x = 1 + t \tag{21}$$

$$y = -2 + 2t \tag{22}$$

$$z = -15 + 12t \tag{23}$$

Hieraus lassen sich nun unendlich viele Gleichungen des geforderten Typs “basteln”. Wähle 2 nach Belieben:

$$2x - y = 4 \tag{24}$$
$$12x - z = 27 \tag{25}$$

## Aufgabe 2.8

Triviales Einsetzen liefert in meinem Beispiel:

$$P_1(1|-2|0) \text{ liegt in } 24$$
$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ist orthogonal zu } 24$$
$$P_2(0|-27|10) \text{ liegt in } 25$$
$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ ist orthogonal zu } 25$$

## Aufgabe 2.9

Gegeben sind eine Ebene und eine Gerade.

$$E : 2x_1 - x_3 = 1 \tag{26}$$
$$g : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{27}$$

Schneide $g$ mit $E$

$$g \cap E : 2(1+0) - 1(1+t) = 1 \Leftrightarrow t = 0 \wedge \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$g \cap E : P(1|0|1) \tag{28}$$

## Aufgabe 2.10

Der Abstand ist die kürzeste Strecke zwischen Ebene und Ursprung. Der Abstandsvektor muss also normal zur Ebene stehen. Gleichung 26 liefert uns den Normalenvektor:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{29}$$

Suche also den Faktor $t$, mit dem $\vec{n}$ multipliziert werden muss, um einen Punkt in der Ebene $E$ zu ergeben.

$$\vec{0} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in E \tag{30}$$

$$\Rightarrow 4t + t = 1$$

$$\Leftrightarrow 5t = 1$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{5} \tag{31}$$

$$\tag{32}$$

$$\Rightarrow \|\vec{d}\|_2 = \left\| \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\frac{4}{25} - \frac{1}{25}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \tag{33}$$