Grundlagen der Physik 3
Lösung zu Übungsblatt 4

Daniel Weiss

4. November 2010

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1

Ausgegangen wird vom Planckschen Strahlungsgesetz:

$$w(\nu)\,\mathrm{d}\,\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{\mathrm{d}\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} \tag{1}$$

Nun wird über alle Frequenzen ν integriert.

$$w(T) = \int_0^\infty w_\nu(\nu,T)\,\mathrm{d}\nu = \frac{8\pi h}{c^3}\int_0^\infty \frac{\nu^3\,\mathrm{d}\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} \tag{2}$$

Dazu zunächst ein Einschub, der später benötigt wird.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-nx})+1 = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}}}_{\text{geom. Reihe}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-nx}} - 1 = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \tag{3}$$

Vor der Integration werden 2 Substitutionen eingeführt, die das Integrieren erleichtert.

$$
\begin{aligned}
x &:= \frac{h\nu}{kT} && (4) \\
\Leftrightarrow \nu &:= \frac{xkT}{h} && (5) \\
\Rightarrow \mathrm{d}\,\nu &= \frac{kT}{h}\,\mathrm{dx} && (6)
\end{aligned}
$$

Das Integral lautet nun:

$$
w(T) = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{x^3 k^4 T^4}{h^4\,(e^x - 1)}\,\mathrm{dx} \tag{7}
$$

Dies lässt sich mit der Substitution

$$
\epsilon := \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3} \tag{8}
$$

weiter vereinfachen.

$$
w(T) = \epsilon \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\,\mathrm{dx} \tag{9}
$$

Der Integrand lässt sich nun umschreiben:

$$
x^3 \frac{1}{e^x - 1} = x^3 \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \underbrace{=}_{Gl.3} x^3 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \tag{10}
$$

Das daraus resultierende Integral lässt sich mit dreifacher partieller Integration lösen.

$$w(T) = \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^3 e^{-nx}\,\mathrm{dx} = \tag{11}$$

$$= \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{\left[-\frac{x^3}{n} e^{-nx} \right]_0^{\infty}}_{=0} - \int_0^{\infty} -\frac{3x^2}{n} e^{-nx}\,\mathrm{dx} \right) = \tag{12}$$

$$= \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{\left[-\frac{3x^2}{n^2} e^{-nx} \right]_0^{\infty}}_{=0} - \int_0^{\infty} -\frac{6x}{n^2} e^{-nx}\,\mathrm{dx} \right) = \tag{13}$$

$$= \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{\left[-\frac{6x}{n^3} e^{-nx} \right]_0^{\infty}}_{=0} - \int_0^{\infty} -\frac{6}{n^3} e^{-nx}\,\mathrm{dx} \right) = \tag{14}$$

$$= \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{6}{n^4} e^{-nx} \right]_0^{\infty} = \epsilon \sum_{0}^{\infty} \frac{6}{n^4} \tag{15}$$

$$\underbrace{=}_{\text{allg. harm. Reihe}} \epsilon \frac{\pi^4}{15} = \underbrace{\frac{8\pi^5 k^4}{15c^3h^3}}_{=:a} T^4 \tag{16}$$

Die so erhaltene Energiedichte kann mit dem Faktor

$$\sigma = \frac{c}{4} a \tag{17}$$

in die Strahlungsleistung umgerechnet werden. Daraus folgt das Stephan-Boltzmann-Gesetz:

$$P = \sigma T^4 = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3} T^4 \tag{18}$$

Aufgabe 2

Die Stefan-Boltzmannsche Strahlungsformel gibt die abgestrahlte Energie pro Zeiteinheit pro Flächeneinheit eines schwarzen Körpers an.

$$\frac{\mathrm{d}\,W}{\mathrm{d}\,t} = \sigma T^4 \tag{19}$$

Mit der Annahme, dass die Sonne die Oberfläche A_S hat wird folgende Leistung abgestrahlt:

$$P = \sigma T^4 \cdot \underbrace{4\pi r_\mathrm{S}^2}_{A_\mathrm{S}} \tag{20}$$

wobei r_S der Radius der Sonne ist. Von dieser Leistung empfängt der Satellit im Abstand R nur einen kleinen Teil P_{sat}.

$$P_{sat} = \frac{A_{sat}}{4\pi R^2} P = \frac{A_{sat}}{4\pi R^2} \sigma T^4 \cdot 4\pi r_S^2 = A_{sat} \sigma T^4 \frac{r_S^2}{R^2} \tag{21}$$

Die Temperatur steigt proportional mit der Frequenz des Strahlungsmaximums an, sodass sie aus der Wellenlänge mit der größten Intensität direkt berechnet werden kann (Wiensches Verschiebungsgesetz).

$$T = \frac{2{,}88 \cdot 10^{-3}\mathrm{m} \cdot \mathrm{K}}{475\mathrm{nm}} = 6063\mathrm{K} \tag{22}$$

Demnach folgt für den Sonnenradius durch Umstellen der obigen Gleichung:

$$r_S = \sqrt{\frac{3110\mathrm{W} \cdot R^2}{\sigma T^4 \cdot A_{sat}}} = \sqrt{\frac{3110\mathrm{W} \cdot (1{,}2 \cdot 10^8\mathrm{km})^2}{\sigma (6063\mathrm{K})^4 \cdot 2{,}21\mathrm{m}^2}} = 1{,}03 \cdot 10^6\mathrm{km} \tag{23}$$

Aufgabe 3

Die Energie der auftreffenden Photonen ist:

$$E_1 = hf = \frac{hc}{\lambda} \tag{24}$$

Die Energie der Photoelektronen ist:

$$E_2 = qU = eU \tag{25}$$

Die Differenz entspricht der Austrittsarbeit:

$$W = E_1 - E_2 = h\frac{c}{\lambda} - eU = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\mathrm{Js} \frac{299792458\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{100 \cdot 10^{-9}\mathrm{m}} - 1{,}602 \cdot 10^{-19}\mathrm{C} \cdot 7{,}7\mathrm{V} = 4{,}7\mathrm{eV} \tag{26}$$

Aufgabe 4

a) Die Energie der eintreffenden Photonen muss der Austrittsarbeit entsprechen.

$$W = h\frac{c}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{ch}{W} = \frac{299792458\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 6{,}626 \cdot 10^{-34}\mathrm{Js}}{4{,}55\mathrm{eV}} = 272{,}52\mathrm{nm} \tag{27}$$

b) Die mittlere aufgenommene Energie pro Sekunde eines Elektrons bei einer Eindringtiefe der Wellen von λ ist:

$$P = \frac{I}{\rho_{\mathrm{e}}\lambda} = \frac{8 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{cm}^2}}{10^{23}\,\frac{1}{\mathrm{cm}^3} \cdot 272{,}52 \cdot 10^{-7}\mathrm{cm}} = 2{,}936\mathrm{W} \tag{28}$$

c) Die Zeit bis zum Auslösen eines Elektrons ist:

$$\frac{W_{\mathrm{A}}}{P} = 2{,}48 \cdot 10^5\mathrm{s} \tag{29}$$