

# Drehpendel

Praktikumsversuch am 10.11.2010

Gruppe: 3

Thomas Himmelbauer  
Daniel Weiss

Abgegeben am: 17.11.2010

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Versuchsaufbau</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Eigenfrequenzbestimmung</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>Dämpfungsdekrementbestimmung</b>	<b>3</b>
<b>5</b>	<b>Zusammenhänge</b>	<b>4</b>
<b>6</b>	<b>Schwingungen bei verschiedenen Dämpfungen</b>	<b>5</b>
6.1	Schwache Dämpfung . . . . .	5
6.2	Kriechfall . . . . .	5
<b>7</b>	<b>Getriebener Oszillator</b>	<b>6</b>
<b>8</b>	<b>Resonanz</b>	<b>6</b>
<b>9</b>	<b>Fehlerrechnung und Datenerfassung</b>	<b>7</b>

# 1 Einleitung

Es werden die Eigenschaften eines harmonischen Oszillators vermessen. Als Oszillator dient ein Pohlsches Rad (Drehpendel), welches mit einer Wirbelstrombremse und einem Erregermotor ausgestattet ist, um das Verhalten eines gedämpften und oder getriebenen Oszillators ebenfalls bestimmen zu können.

## 2 Versuchsaufbau

Das Drehpendel nach Pohl besteht aus einem frei drehbar gelagerten Kupferrad, das als Schwungmasse fungiert. Eine Spiralfeder auf der Drehachse bewirkt eine rückstellende Kraft im Falle einer Auslenkung und erzeugt somit eine harmonische Schwingung. Eine fixierte, kreisförmige Skala um die Kupferscheibe dient zur Einrichtung des Nullpunktes und zur Orientierung. Das Kupferrad kann über einen Elektromagneten, der als Wirbelstrombremse wirkt, gedämpft werden. Ein Motor, der über ein externes Netzgerät mit Gleichstrom versorgt wird, kann eine Treiberfrequenz über eine exzentrische Schubstange auf die drehbare Achse des Kupferrades übertragen. Die Auslenkung der Kupferscheibe wird über eine Schnur auf den Bewegungswandler übertragen, über welchen die Daten elektronisch erfasst werden können. Im Bewegungswandler werden mittels eines Zahnrads zwei Lichtschranken unterschiedlich unterbrochen, wodurch Drehrichtung und -geschwindigkeit mit der Software *CassyLab* erfasst werden.

## 3 Eigenfrequenzbestimmung

Zur Bestimmung der Eigenfrequenz des Drehpendels, wird die Schwingung im ungedämpften, ungetriebenen Zustand beobachtet. Nach der manuellen Auslenkung des Drehpendels wird die elektronische Messung mittels *CassyLab* gestartet. Aus den aufgezeichneten Daten können die Amplituden und deren Zeitpunkt ausgelesen werden. Die Eigenfrequenz  $f$  des Systems ist definiert als

$$f := \frac{1}{T} \quad (1)$$

wobei  $T$  die Periodendauer ist. Das System sollte theoretisch ungedämpft und periodisch sein. Durch Reibung und andere systematische Fehler ist dies nicht möglich, wodurch eine sehr schwache Dämpfung ersichtlich wird (Abb. 1).

Für das Drehpendel ergibt sich aus den Messdaten VERWEIS!! eine Eigenfrequenz von:

$$f := (0,5807 \pm 0,0038)\text{Hz} \quad (2)$$

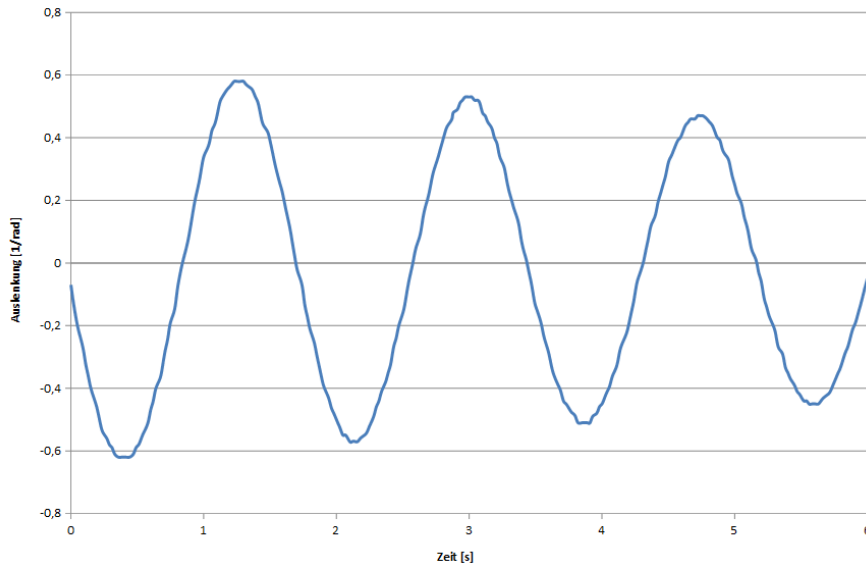


Abbildung 1: Graph der gemessenen Auslenkungen im ungedämpften, ungetriebenen Fall (Eigenfrequenz).

## 4 Dämpfungsdekrementbestimmung

In den Messungen für die Eigenfrequenz kann wie oben beschrieben eine schwache Dämpfung festgestellt werden. Das Dämpfungsdekrement  $k$  kann mittels *CassyLab* oder manuell durch bilden des Verhältnisses zweier aufeinanderfolgender Amplituden berechnet werden.

$$\frac{A_1}{A_2} = k = (1,11 \pm 0,02) \quad (3)$$

Aus diesem Verhältnis lässt sich das logarithmische Dämpfungsdekrement

$$\Lambda = \ln(k) = \delta \cdot t = 0,10 \quad (4)$$

, sowie die Abklingkonstante  $\delta = \Lambda f$  bestimmen.

Die Berechnungen mittels *CassyLab* sind durch die Berücksichtigung aller Messdaten ohne Auslesefehler wesentlich genauer, als die manuelle Berechnung anhand weniger Daten.

$$\delta_{\text{cassy}} = 0,0615 \frac{1}{\text{s}} \quad (5)$$

$$\delta_{\text{manuell}} = (0,0640 \pm 0,0058) \frac{1}{\text{s}} \quad (6)$$

Die Dämpfung verändert die gemessene Eigenfrequenz folgendermaßen:

$$\omega_{\text{gemessen}} = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad (7)$$

Auf Grund der sehr geringen Größe von  $\delta$  ist die Abweichung jedoch sehr gering.

## 5 Zusammenhänge

Da die Vereinfachung für den harmonischen Oszillator mit

$$x = A \cos(\omega t) \quad (8)$$

gilt, können mittels Differenzieren die Winkelgeschwindigkeit

$$x' = -A\omega \sin(\omega t) \quad (9)$$

und die Winkelbeschleunigung

$$x'' = -A\omega^2 \cos(\omega t) \quad (10)$$

berechnet werden. Durch das Differenzieren der Winkelfunktionen ergibt sich für jede Differentiation eine Phasenverschiebung von  $\frac{\pi}{2}$ .

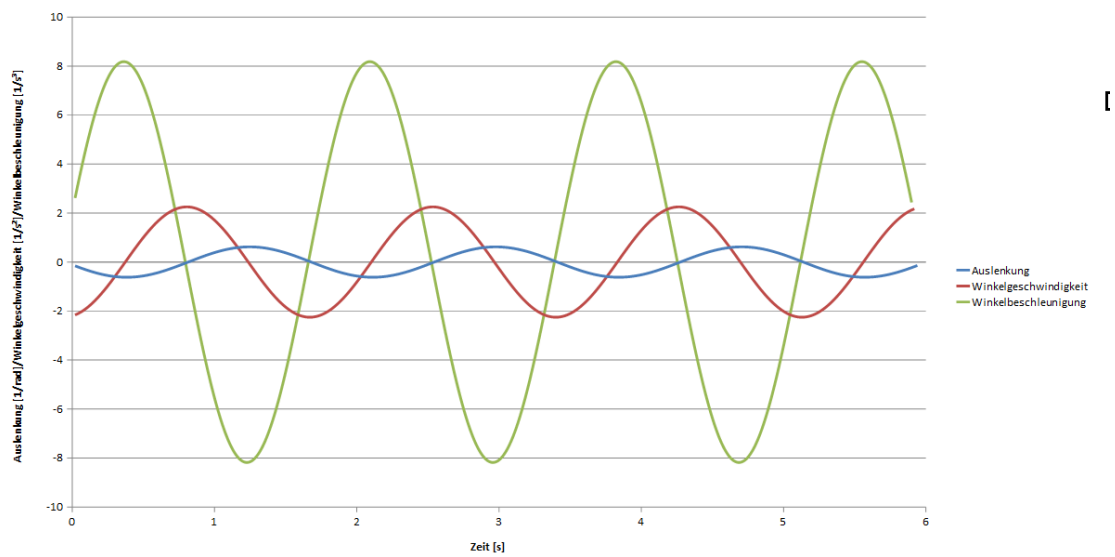


Abbildung 2: Zusammenhang zwischen Auslenkung des Pendels, Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung.

## 6 Schwingungen bei verschiedenen Dämpfungen

### 6.1 Schwache Dämpfung

Bei der schwachen Dämpfung nähert sich die Amplitude langsam an Null an. Es wird ein Strom von etwa 0,5A an die Wirbelstrombremse, die als Dämpfung fungiert, angelegt.

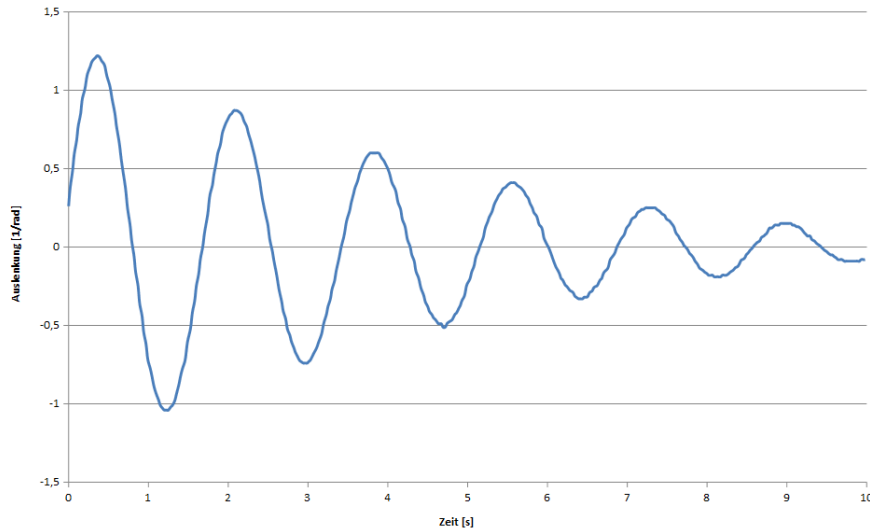


Abbildung 3: Schwingung bei schwacher Dämpfung.

### 6.2 Kriechfall

Um eine Starke Dämpfung zu erreichen wird der maximal zulässige Strom an den Magneten der Wirbelstrombremse angelegt, in diesem Fall 2A.

Wie aus dem Versuch ersichtlich, kann mit der technisch maximal erreichbaren Dämpfung kein Kriechfall erzeugt werden. Es ist auch nicht möglich den Grenzfall zwischen schwacher Dämpfung und Kriechfall, den aperiodischen Fall, zu erhalten.

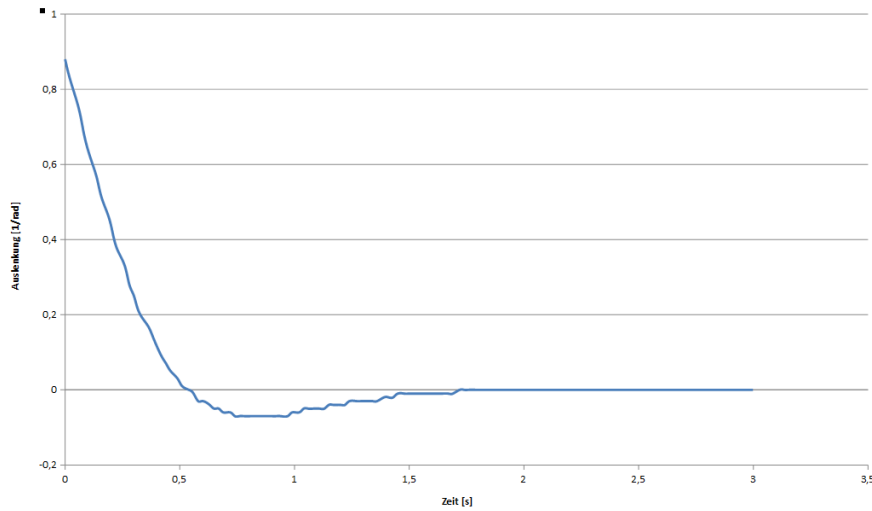


Abbildung 4: Schwingung bei maximaler Dämpfung. Zu sehen ist eine beinahe aperiodische Dämpfung.

## 7 Getriebener Oszillator

Aus den Messreihen kann ein direkter Zusammenhang zwischen der elektrischen Spannung des Motors und der Erregerfrequenz beobachtet werden (Abb. 5).

## 8 Resonanz

Die Messung wird mit verschiedenen Dämpfungen und Erregerfrequenzen durchgeführt. Es ist dabei darauf zu achten, dass keine Resonanzkatastrophe eintritt und, dass die Messung nach Einschwingvorgang durchgeführt wird.

Abbildung 6 zeigt die Resonanzkurven bei verschiedenen Dämpfströmen. Leider wurden zu wenige Messungen und keine bei der Resonanzfrequenz durchgeführt, sodass das Schaubild wenig aussagekräftig ist. Bei mehr Messwerten ist zu sehen, dass mit zunehmender Dämpfung die Maximalamplitude geringer wird und sich das Resonanzmaximum nach links verschiebt. Dies hängt mit der Beziehung

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{\omega_0^2}} \quad (11)$$

zusammen. Je größer die Dämpfung, desto mehr wird  $\frac{\omega}{\omega_0}$  nach „links“ verschoben. Diese

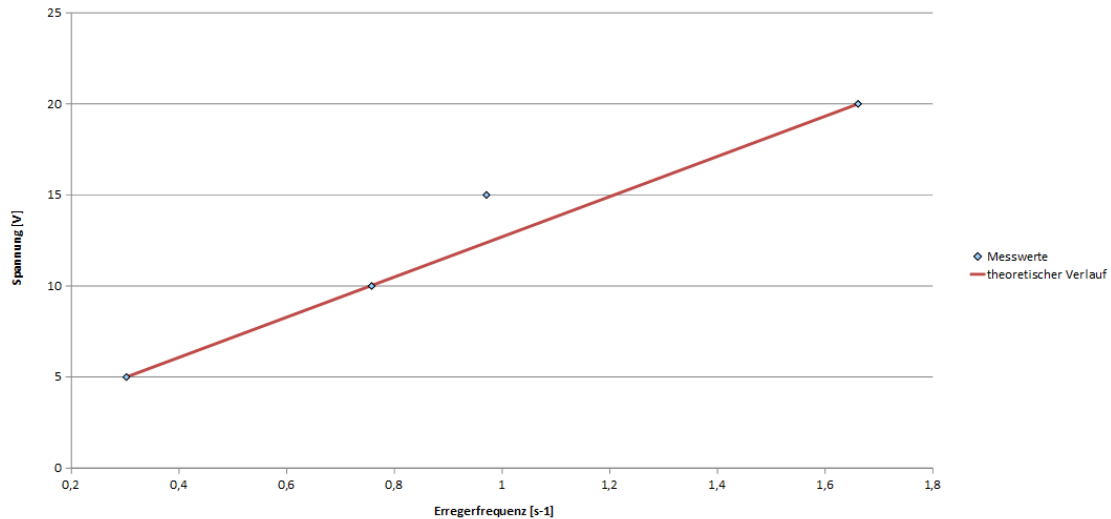


Abbildung 5: Anregung des Drehpendels mit dem Motor ohne zugeschaltete Wirbelstrombremse. Der Graph zeigt die am Motor angelegte Spannung über der Erregerfrequenz.

Gleichung gilt für schwache Dämpfung mit

$$\delta < \omega_0 \quad (12)$$

Die Erregerfrequenz ist über die mathematische Beziehung

$$\tan(\phi) = \frac{2\delta\omega_E}{\omega_0^2 - \omega_E^2} \quad (13)$$

mit der Eigenfrequenz des Drehpendels verknüpft.

Bei kleinen Erregerfrequenzen gibt es beinahe keine Phasenverschiebung. Ist die Erregerfrequenz jedoch gleich der Eigenfrequenz, so ist die Phase um  $\frac{\pi}{2}$  verschoben. Bei einer viel größeren Erregerfrequenz im Vergleich zur Eigenfrequenz nähert sich die Phasenverschiebung asymptotisch an  $\pi$  an.

## 9 Fehlerrechnung und Datenerfassung

Ein Maß für den statistischen Fehler ist die Standardabweichung. Diese ist die Wurzel der Varianz und wird folgendermaßen berechnet:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (14)$$



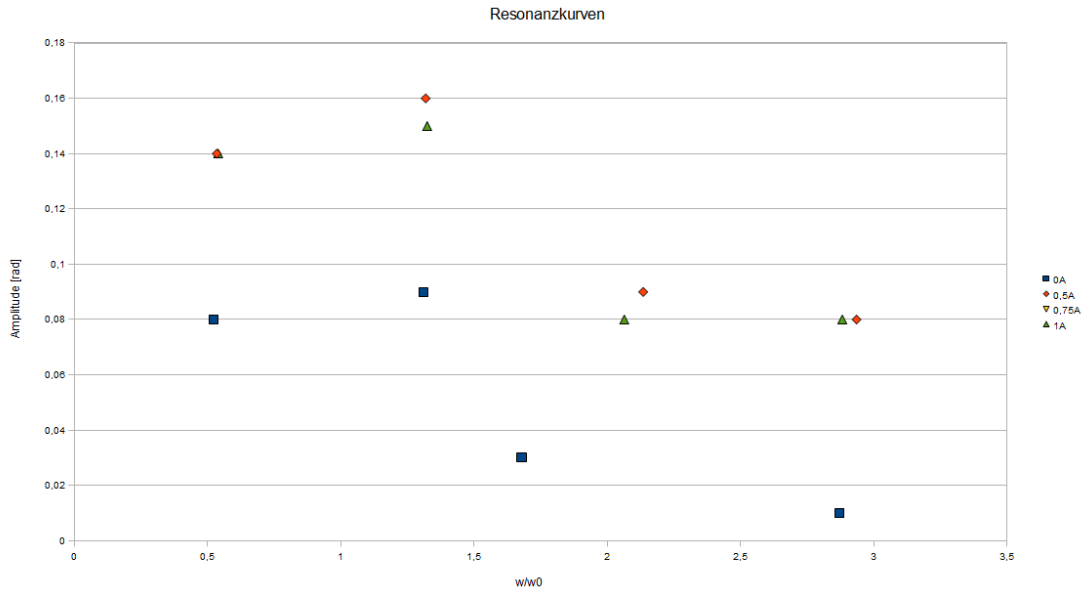


Abbildung 6: Resonanzkurven. Aufgetragen ist die Maximalamplitude über dem Verhältnis von Kreisfrequenz zu Eigenkreisfrequenz.

Für weitere Berechnungen wird die Fehlerfortpflanzung benötigt, um den Gesamtfehler des Ergebnisses anzugeben:

$$\sigma_g = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \dots} \quad (15)$$

Beide Formeln sind der Versuchsanleitung entnommen[IE08].

Es werden die ersten vier positiven Amplituden und deren Zeitpunkte zur Berechnung herangezogen.

Da die Datensätze aus CassyLab die gleiche Amplitude zu mehreren, aufeinanderfolgenden Zeitpunkten ausgibt, wird der Zeitpunkt der Amplitude rechnerisch gemittelt.

Amplitudenzahl	1	2	3	4
Amplituden[rad]	0,58	0,53	0,47	0,42
Zeitpunkt[s]	1,27	3	4,74	6,45

Tabelle 1: 1. Messung der Eigenfrequenz.

Amplitudenzahl	1	2	3	4
Amplituden[rad]	0,59	0,53	0,47	0,42
Zeitpunkt[s]	1,25	2,97	4,74	6,43

Tabelle 2: 2. Messung der Eigenfrequenz.

Amplitudenzahl	1	2	3	4
Amplituden[rad]	0,34	0,28	0,23	0,18
Zeitpunkt[s]	0,88	2,6	4,32	6,02

Tabelle 3: 3. Messung der Eigenfrequenz.

Zur Berechnung der Eigenfrequenz wurde die Formel 1 und zur Berechnung der Abklingkonstante die Formel 4 herangezogen.

Frequenz[Hz]	0,5780	0,5747	0,5848
Abklingkonstante[ $\frac{1}{s}$ ]	0,0521	0,0690	0,0658

Tabelle 4: Berechnete Eigenfrequenzen der 1. Messung (Tab. 1)

Frequenz[Hz]	0,5814	0,5780	0,5780
Abklingkonstante[ $\frac{1}{s}$ ]	0,0624	0,0694	0,0650

Tabelle 5: Berechnete Eigenfrequenzen der 2. Messung (Tab. 2)

Frequenz[Hz]	0,5814	0,5814	0,5882
Abklingkonstante[ $\frac{1}{s}$ ]	0,1129	0,1144	0,1442

Tabelle 6: Berechnete Eigenfrequenzen der 3. Messung (Tab. 3)

Für die Auswertung der Abklingkonstante werden die Daten aus der dritten Messreihe nicht berücksichtigt, da die Abweichung zu den Messwerten der beiden anderen Messreihen bei beinahe 50 Prozent liegt. Eine Abweichung der dritten Messreihe wird mit dem höheren Einfluss von Reibung bei niederen Geschwindigkeiten erklärt. Die Standardabweichungen werden mit der Formel 14 berechnet.

$$f_m = (0,5807 \pm 0,0041)\text{Hz} \quad (16)$$

$$\delta_m = (0,0640 \pm 0,0064)\frac{1}{s} \quad (17)$$

## Literatur

[IE08] INSTITUTE E134, E138: *Drehpendel*, 2008