Grundlagen der Physik 2
Lösung zu Übungsblatt 4

Daniel Weiss

24. März 2010

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1

$$\operatorname{div}\vec{F} = \vec{\nabla}\vec{F} = 1 + 1 - 2 = 0 \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\operatorname{div}\vec{G} = 0 + 0 + 0 = 0 \tag{3}$$

$$\operatorname{rot}\vec{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\operatorname{div}\vec{H} = 2x + 0 + 2x = 4x \tag{5}$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4z \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Das zu $\vec{G}$ gehörige Skalarfeld sei $\phi(x, y, z)$.

$$\int 2y\,\mathrm{dx} = 2xy + C(y, z) \tag{7}$$

$$\int 2x + 3z\,\mathrm{dy} = 2xy + 3yz + C(x, z) \tag{8}$$

$$\int 3y\,\mathrm{dz} = 3yz + C(x, y) \tag{9}$$

$$\Rightarrow \phi(x, y, z) = -2xy - 3yz \tag{10}$$

Aufgabe 2

a) Mit dem Satz von Gauß:

$$\int_{\partial V} \vec{E}\mathrm{d}\vec{\mathrm{A}} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0}\,\mathrm{dV} = \frac{Q_\mathrm{i}}{\epsilon_0} \tag{11}$$

$$\Rightarrow \int_0^l \int_0^{2\pi} rE\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{dl} = 2\pi r l E = \frac{Q_\mathrm{i}}{\epsilon_0} \tag{12}$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{Q_\mathrm{i}}{2\pi r l \epsilon_0} = \frac{Q}{2\pi r h \epsilon_0} \tag{13}$$

l ist dabei die Ausdehnung der Gauß'schen Fläche entlang der "Höhe". Damit die Randeffekte nicht berücksichtigt werden müssen wählen wir: $l << h$. Beim letzten Schritt wurde verwendet, dass die Ladung entlang der "Höhe" des Zylinders gleichmäßig verteilt ist. Also

$$Q_\mathrm{i} = \frac{l}{h}Q \tag{14}$$

Integrieren über r liefert die Spannung bzw. Potentialdifferenz zwischen den beiden Hohlzylindern.

$$\Delta\Phi = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \mathrm{d}\Phi = -\int_{r_1}^{r_2} E\,\mathrm{dr} = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h}\int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{dr}}{r} = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \tag{15}$$

$$\Rightarrow U = \|\Delta\Phi\|_2 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \tag{16}$$

Demnach ist die Kapazität

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \tag{17}$$

b)

$$C = 38{,}7\mathrm{pF} \tag{18}$$

Aufgabe 3

a) Anwenden des Satz' von Gauß:

$$\int_{\partial V} \vec{E}\mathrm{d}\vec{\mathrm{A}} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0}\,\mathrm{dV} = \frac{\rho V}{\epsilon_0} \tag{19}$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_1}^{x_2}\int_{z_1}^{z_2} E\,\mathrm{dz}\,\mathrm{dx} = \frac{\rho V}{\epsilon_0} \tag{20}$$

$$\Leftrightarrow \Delta x\Delta z E = \frac{\rho V}{\epsilon_0} = \frac{\rho\Delta x\Delta z\Delta y}{\epsilon_0} \tag{21}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho\Delta y}{\epsilon_0} = \frac{\rho y}{\epsilon_0} \tag{22}$$

Dabei wurde verwendet: $y_1 = 0, y := y_2$
Wichtig hierbei: Es muss $0 < y < b$ gelten, sonst macht die Gleichung physikalisch keinen Sinn mehr. Außerdem gibt die Gleichung nur die Feldstärke an, die von der von 0 bis y eingeschlossenen Raumladung hervorgerufen wird. Für die maximale Feldstärke - der gesamten Raumladung - folgt

$$E = \frac{\rho b}{\epsilon_0} \tag{23}$$

b) Das Potential ist

$$\phi = -\int E\,\mathrm{dy} = -\frac{1}{2}\frac{\rho y^2}{\epsilon_0} \tag{24}$$

Anwenden des Laplace-Operators liefert direkt die Poisson-Gleichung:

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \square \tag{25}$$

Aufgabe 4

a) Mit dem Satz von Gauß lässt sich das elektrische Feld berechnen.

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\underbrace{r^2\sin(\theta)}_{\text{Funktionaldet.}}\ E\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta = 4\pi r^2 E \overset{\text{Gauß}}{=} \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{26}$$

$$\Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi r^2\epsilon_0} \tag{27}$$

Um die Spannung zu erhalten muss über den Radius r integriert werden.

$$U = \|\Delta\phi\|_2 = \left\|-\int_{r_1}^{r_2} E\,\mathrm{dr}\right\|_2 = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{dr}}{r^2} = \tag{28}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{Q(r_2-r_1)}{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2} \tag{29}$$

Die Kapazität ist dann

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1} = 20\mathrm{pF} \tag{30}$$

b) Im Grenzfall $r_2 - r_1 << r_1$ kann der Kugelkondensator als Plattenkondensator genähert werden. Definiere: $d := r_2 - r_1$.

$$\Rightarrow C \approx \frac{4\pi\epsilon_0 r_1^2}{d} = \frac{A}{d}\epsilon_0 \qquad \square \tag{31}$$

Aufgabe 5

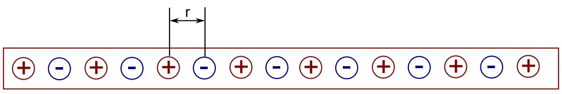

Abbildung 1: eindimensionaler ionischer Kristall

Die potentielle Energie zwischen 2 benachbarten Ionen ist das Integral über die Coulombkraft nach dem Abstand.

$$E = \int -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2}\,\mathrm{dr} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{32}$$

Das Vorzeichen wurde so gewählt, dass anziehende Kräfte negativ und abstoßende Kräfte positiv sind. Für die beiden nächsten Ionen ist der Abstand $2r$ und die Kraft positiv. Für die beiden übernächsten ist der Abstand jeweils $3r$ und die Kraft wieder negativ, usw. Als Reihe aufgeschrieben folgt die gesamte potentielle Energie:

$$E = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty}\left((-1)^{i+1}\frac{2}{i}\right)}_{=:\alpha} \tag{33}$$

Der Faktor α ist von der Struktur der Ionen abhängig und heißt "Madelung-Konstante". In diesem Fall kann α über die Taylor-Entwicklung von $\ln(1+x)$ bestimmt werden. Entwickeln nach $a := 0$ und $x := 1$ liefert die Lösung:

$$\alpha = 2\ln(2) \Rightarrow E = \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \cdot \ln(2) \tag{34}$$

Aufgabe 6

Aus dem Ampère'schen Gesetz

$$\oint_c \vec{B}\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}} = \mu_0 I \tag{35}$$

folgt

$$2\pi r B = \mu_0 I \Rightarrow I = 2H\pi r = 1{,}5\mathrm{kA} \tag{36}$$