# Grundlagen der Physik 3
# Lösung zu Übungsblatt 1

Daniel Weiss

10. Oktober 2010

## Inhaltsverzeichnis

## Aufgabe 1

Alle Größen können durch auflösen der allgemeinen Gasgleichung:

$$pV = nRT \tag{1}$$

bestimmt werden.

a) 12g $^{12}C$ enthält 1mol Atome. Daher enthalten 10g:

$$\frac{10}{12} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = 5{,}02 \cdot 10^{23} \tag{2}$$

Atome.

b)

$$N = \frac{pV}{k_\mathrm{B}T} = \frac{10^5\mathrm{Pa} \cdot 10^{-3}\mathrm{m}^3}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} \cdot 273{,}15\mathrm{K}} = 2{,}65 \cdot 10^{22} \tag{3}$$

Atome.

c) Wir suchen die Anzahl der Moleküle; das Ergebnis muss demnach halbiert werden. Ein Stickstoffatom wiegt ca. 14u. Es sind also

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1000\mathrm{g}}{14\mathrm{g}} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = 2{,}15 \cdot 10^{25} \tag{4}$$

Moleküle.

d)

$$N = \frac{pV}{k_\mathrm{B}T} = \frac{2 \cdot 10^7\mathrm{Pa} \cdot 2 \cdot 10^{-2}\mathrm{m}^3}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} \cdot 295{,}15\mathrm{K}} = 9{,}82 \cdot 10^{25} \tag{5}$$

Moleküle.

## Aufgabe 2

Diese Aufgabe ist wieder eine Anwendung der allgemeinen Gasgleichung.

a)

$$N = \frac{pV}{k_\mathrm{B}T} = \frac{10^5\mathrm{Pa} \cdot 1\mathrm{m}^3}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} \cdot 273{,}15\mathrm{K}} = 2{,}65 \cdot 10^{25} \tag{6}$$

Moleküle.

b) "Pflastert" man das gesamte als kubisch angenommene Volumen mit größtmöglichen Würfeln, welche jeweils ein Luftmolekül enthalten, so ist die Kantenlänge dieser Würfel der gesuchte mittlere Abstand zwischen den Mittelpunkten zweier Moleküle.

$$d = \sqrt[3]{n^{-1}} = 3{,}35\mathrm{nm} \tag{7}$$

c) Der Raumausfüllungsfaktor ist das Verhältnis des Volumens der Atome zum gesamten verfügbaren Volumen bzw. der Einheitszelle bei Kristallstrukturen.

$$\eta = \frac{V_{\text{Atome}}}{V_{\text{gesamt}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot (0{,}1\text{nm})^3 \cdot 2{,}65 \cdot 10^{25}}{1\text{m}^3} = 1{,}11 \cdot 10^{-4} \tag{8}$$

d)

$$\Lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 2{,}65 \cdot 10^{25}\frac{1}{\text{m}^3} \cdot \pi \cdot (0{,}1\text{nm})^2} = 212\text{nm} \tag{9}$$

e) Es ergeben sich folgende Werte:

i)

$$N = \frac{pV}{k_{\text{B}}T} = \frac{3 \cdot 10^7\text{Pa} \cdot 1\text{m}^3}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 273{,}15\text{K}} = 7{,}96 \cdot 10^{27} \tag{10}$$

Moleküle.

ii)

$$d = \sqrt[3]{n^{-1}} = 0{,}501\text{nm} \tag{11}$$

iii)

$$\eta = \frac{V_{\text{Atome}}}{V_{\text{gesamt}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot (0{,}1\text{nm})^3 \cdot 7{,}96 \cdot 10^{27}}{1\text{m}^3} = 0{,}033 \cdot 10^{-4} \tag{12}$$

iv)

$$\Lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 7{,}96 \cdot 10^{27}\frac{1}{\text{m}^3} \cdot \pi \cdot (0{,}1\text{nm})^2} = 0{,}7\text{nm} \tag{13}$$

f) Es ergeben sich folgende Werte:

i)

$$N = \frac{pV}{k_{\text{B}}T} = \frac{10^5\text{Pa} \cdot 1\text{m}^3}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 673{,}15\text{K}} = 1{,}08 \cdot 10^{25} \tag{14}$$

Moleküle.

ii)

$$d = \sqrt[3]{n^{-1}} = 4{,}5\text{nm} \tag{15}$$

iii)

$$\eta = \frac{V_{\text{Atome}}}{V_{\text{gesamt}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot (0{,}1\text{nm})^3 \cdot 1{,}08 \cdot 10^{25}}{1\text{m}^3} = 4{,}52 \cdot 10^{-5} \tag{16}$$

iv)

$$\Lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 1{,}08 \cdot 10^{27}\frac{1}{\text{m}^3} \cdot \pi \cdot (0{,}1\text{nm})^2} = 520\text{nm} \tag{17}$$

## Aufgabe 3

a) Aus der Literatur (encyclopedia.airliquide.com) habe ich folgende Molekulargewichte:

$$\begin{aligned} \text{Stickstoff}: &\quad 28{,}0134\frac{\text{g}}{\text{mol}} \\ \text{Sauerstoff}: &\quad 31{,}9988\frac{\text{g}}{\text{mol}} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich eine Gesamtdichte von

$$\underbrace{0{,}79 \cdot 2{,}65 \cdot 10^{25}\frac{1}{\text{m}^3} \cdot \frac{28{,}0134\frac{\text{g}}{\text{mol}}}{6{,}022 \cdot 10^{23}\frac{1}{\text{mol}}}}_{\text{Stickstoff}} + \underbrace{0{,}21 \cdot 2{,}65 \cdot 10^{25}\frac{1}{\text{m}^3} \cdot \frac{31{,}9988\frac{\text{g}}{\text{mol}}}{6{,}022 \cdot 10^{23}\frac{1}{\text{mol}}}}_{\text{Sauerstoff}} = 1{,}27\frac{\text{kg}}{\text{mol}} \tag{18}$$

b)

$$\underbrace{0{,}79 \cdot 2{,}65 \cdot 10^{25}\frac{1}{\text{m}^3} \cdot \frac{28\frac{\text{g}}{\text{mol}}}{6{,}022 \cdot 10^{23}\frac{1}{\text{mol}}}}_{\text{Stickstoff}} + \underbrace{0{,}21 \cdot 2{,}65 \cdot 10^{25}\frac{1}{\text{m}^3} \cdot \frac{32\frac{\text{g}}{\text{mol}}}{6{,}022 \cdot 10^{23}\frac{1}{\text{mol}}}}_{\text{Sauerstoff}} = 1{,}27\frac{\text{kg}}{\text{mol}} \tag{19}$$

## Aufgabe 4

a) Nach dem Äquipartitionstheorem kommt jedem Freiheitsgrad dieselbe kinetische Energie zu, und zwar:

$$\overline{E} = \frac{1}{2}k_\text{B}T \tag{20}$$

Stickstoffgas hat 5 Translations- und Rotationsfreiheitsgrade. Daraus folgt die mittlere kinetische Energie:

$$\overline{E} = \frac{5}{2}k_\text{B}T = \frac{5}{2} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}\frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 295{,}15\text{K} = 1{,}02 \cdot 10^{-20}\text{J} \tag{21}$$

b) Umstellen der Formel für die kinetische Energie:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \tag{22}$$

liefert die mittlere Geschwindigkeit.

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{2\overline{E}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}018 \cdot 10^{-20}\mathrm{J}}{0{,}028\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}} \cdot \frac{1}{6{,}022 \cdot 10^{23}\frac{1}{\mathrm{mol}}}}} \cdot 3{,}6\frac{\mathrm{km} \cdot \mathrm{s}}{\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}} = 2383\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \tag{23}$$

## Aufgabe 5

Zunächst muss die mittlere quadratische Geschwindigkeit der Sauerstoffmoleküle bestimmt werden. Diese ist nach Maxwell-Boltzmann:

$$\overline{v^2} = \frac{3k_\mathrm{B}T}{m} = \frac{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} \cdot 673{,}15\mathrm{K}}{0{,}032\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}} \cdot \frac{1\mathrm{mol}}{6{,}022 \cdot 10^{23}}} = 5{,}24 \cdot 10^5\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \tag{24}$$

Der Planet ist groß genug, wenn er Moleküle der mittleren quadratischen Geschwindigkeit dauerhaft an sich binden kann. Die mittlere quadratische Geschwindigkeit entspricht also dem Quadrat der Fluchtgeschwindigkeit. Mit der Forderung der Äquivalenz von kinetischer und potentieller Energie für das Berechnen der Fluchtgeschwindigkeit

$$G^* \frac{mM}{r} = G^* \frac{m\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{r} = \frac{1}{2}m\overline{v^2} \tag{25}$$

lässt sich nun der minimale Radius berechnen

$$r = \sqrt{\frac{3}{8}\frac{\overline{v^2}}{\pi\rho G^*}} = \sqrt{\frac{3}{8}\frac{5{,}24 \cdot 10^5\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{\pi \cdot 5500\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 6{,}672 \cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kgs}^2}}} = 413\mathrm{km} \tag{26}$$

## Aufgabe 6

a) Ein Teilchen hat die Masse

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho = \frac{4}{3}\pi \cdot (2{,}12 \cdot 10^{-7}\mathrm{m})^3 \cdot 1194\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 4{,}77 \cdot 10^{-17}\mathrm{kg} \tag{27}$$

Aufgrund der Auftriebskraft des Wassers ergibt sich mit dem archimedischen Prinzip eine scheinbare Masse $m^*$ im Wasser:

$$\begin{aligned} m^* &= (m - \rho_\mathrm{Wasser}V) = (\rho_\mathrm{T} - \rho_\mathrm{W})V \\ &= (1194\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} - 1000\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}) \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot (2{,}12 \cdot 10^{-7}\mathrm{m})^3 = 7{,}74 \cdot 10^{-18}\mathrm{kg} \end{aligned} \tag{28}$$

b) Mit der barometrischen Höhenformel

$$\frac{n(h_2)}{n(h_1)} = e^{-\frac{m^* g}{k_\mathrm{B}T}(h_2 - h_1)} \tag{29}$$

kann durch Umformung die Boltzmann-Konstante berechnet werden.

$$k_\mathrm{B} = -\frac{m^* g}{\ln\left(\frac{n(h_2)}{n(h_1)}\right) T}(h_2 - h_1) = 1{,}325 \cdot 10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} \tag{30}$$

Die Avogadro-Konstante wird mit der universellen Gaskonstante bestimmt.

$$N_\mathrm{A} = \frac{R}{k_\mathrm{B}} = \frac{8{,}315\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol \quad K}}}{1{,}325 \cdot 10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}} \tag{31}$$

c)

$$M = N_\mathrm{A} m = 2{,}99 \cdot 10^{7}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}} \tag{32}$$

d) Ausgehend von Gleichung 30 wird nach $n(h_2)$ aufgelöst und der Literaturwert von $k_\mathrm{B}$ eingesetzt.

$$n(h_2) = e^{-\frac{m^* g}{k_\mathrm{B} T}(h_2 - h_1)} n(h_1) = 11{,}7 \tag{33}$$