Grundlagen der Physik 1
Lösung zu Übungsblatt 9

Daniel Weiss

9. Dezember 2009

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 1

Von der Dachoberkante bis zum Sims führt der Hammer eine rutschende Bewegung aus. Es wirken zum einen die Beschleunigende Gravitationskraft und zum anderen die bremsende Reibungskraft. Beide sind von der Geschwindigkeit und der Masse, sowie der Form des Hammers unabhängig. Ihre Summe liefert die resultierende, beschleunigende Kraft.

$$F_N = mg\cos(\alpha) \Rightarrow F_R = \mu mg\cos(\alpha) \tag{1}$$

$$F_B = mg\sin(\alpha) \tag{2}$$

$$\Rightarrow F = F_B - F_R = mg(\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha)) \tag{3}$$

$$\Rightarrow a = g(\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha)) \tag{4}$$

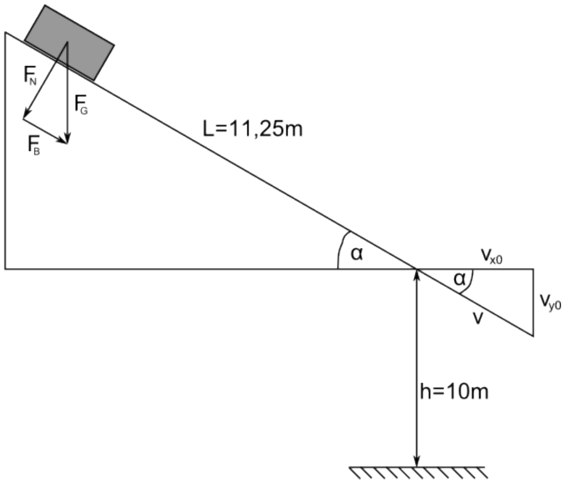

Abbildung 1: rutschender Hammer

Die Geschwindigkeit des Hammers beim Verlassen des Dachs ist somit:

$$v = at \tag{5}$$

$$L = \frac{1}{2}at^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2L}{a}} \tag{6}$$

$$\overset{(6) in (5)}{\Rightarrow} v = \sqrt{2La} \tag{7}$$

$$\Rightarrow v_{x0} = v\cos(\alpha) \tag{8}$$

$$\Rightarrow v_{y0} = v\sin(\alpha) \tag{9}$$

Ab dem Abheben vom Dach beschreibt der Hammer eine Wurfparabel mit den Anfangsgeschwindigkeiten v_{x0} und v_{y0}. Wähle das Koordinatensystem so, dass die y-Achse nach oben positiv und die x-Achse nach rechts positiv sind und nehme eine Bewegung des Hammers nach rechts an (siehe Abb. 1). Stelle nun die Bewegungsgleichung des Hammers auf und Löse nach $s(x) = h$.

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_{y0}t \tag{10}$$

$$t = \frac{x}{v_{x0}} \tag{11}$$

$$\Rightarrow s(x) = \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{x0}}\right)^2 + v_{y0}\frac{x}{v_{x0}} - h = 0 \tag{12}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{v_{y0} \cdot v_{x0}}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_{y0} \cdot v_{x0}}{g}\right)^2 + \frac{2v_{x0}^2 \cdot h}{g}} = 7{,}07\text{m} \tag{13}$$

Bei der Lösung der quadratischen Gleichung wurde, wie auch bei Gleichung 6 nur die positive Lösung angegeben, da die negative physikalisch keinen Sinn macht.

Aufgabe 2

Die Skizze ist analog zu Abbildung 1. Die Kraft, die nötig ist, um den Körper in eine Abwärtsbewegung zu versetzen ist:

$$F_1 = F_R - F_B = mg(\mu\cos(\alpha) - \sin(\alpha)) \tag{14}$$

da die Gravitationskraft die benötigte Kraft verringert. Für eine Aufwärtsbewegung muss die Gravitationskraft noch zusätzlich überwunden werden und es ergibt sich mit $F_2 = 6F_1$, wobei F_1 die Kraft nach unten und F_2 die nach oben ist:

$$F_2 = F_R + F_B = 6F_1 \Leftrightarrow 7F_B = 5F_R \Leftrightarrow \mu = \frac{7}{5}\tan(\alpha) = 0{,}375 \tag{15}$$

Aufgabe 3

a) Die Formel für die Geschwindigkeit lautet (7):

$$v = \sqrt{2as_1} = 4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{16}$$

wobei für a Gleichung 4 eingesetzt wurde.

b) Setze in Gleichung 6 ein:

$$t = \sqrt{\frac{2s_1}{a}} = 1{,}25\mathrm{s} \tag{17}$$

c) Da der Körper nun auf einer Waagrechten rutscht, bis er zum Stillstand kommt, gilt:

$$F_R = \mu mg \Rightarrow a = \mu g \tag{18}$$

$$\overset{(7)}{\Rightarrow} s_2 = \frac{v^2}{2a} = 4{,}08\mathrm{m} \tag{19}$$

Aufgabe 4

Es gilt für die Anzahl der Teilchen mit einer bestimmten Geschwindigkeit:

$$n(v) := N\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \tag{20}$$

Die wahrscheinlichste Geschwindigkeit ist nun diejenige, bei der $n(v)$ maximal wird.

$$\frac{dn}{dv}(v) = N\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} 8\pi v e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} - N\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi v^2 \cdot \frac{2mv}{2k_B T} \cdot e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} = 0$$

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \tag{21}$$

Aufgabe 5

Für die mittlere Geschwindigkeit gilt:

$$\overline{v} = \frac{\sum\limits_i v_i}{N} = \frac{\sum\limits_v v \cdot n(v)}{N} = \int_0^\infty \frac{v \cdot n(v)}{N} \tag{22}$$

Setze nun Gleichung 20 ein und integriere (N bereits rausgekürzt):

$$\int_0^\infty dv \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} 4\pi v^3 e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}} =$$

Substituiere: $a := v^2$ und $A := \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}}$ (Grenzen bleiben gleich)

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty da \cdot 2aA^3\pi e^{-\pi a A^2} \overset{\text{part. Int.}}{=} \\
&= \underbrace{-\frac{2aA^3\pi}{\pi A^2} e^{-\pi a A^2}\Big|_0^\infty}_{=0} - \int_0^\infty da \left(-\frac{2A^3\pi}{\pi A^2}\right) e^{-\pi A^2 a} = \\
&= -\frac{2A}{\pi A^2} e^{-\pi A^2 a}\Big|_0^\infty = \frac{2}{A\pi}
\end{aligned} \tag{23}$$

Resubstituiere

$$=2\left(\frac{2k_BT}{m\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{8k_BT}{m\pi}} \tag{24}$$

Aufgabe 6

Das Volumen der Kugel ist:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 4{,}2\mathrm{l} = 4{,}2 \cdot 10^{-3}\mathrm{m}^3 \tag{25}$$

Die mittlere Weglänge soll dem Durchmesser des Gefäßes entsprechen, also

$$\Lambda = 2r = 2\sqrt[3]{\frac{3}{4}\frac{V}{\pi}} = \sqrt[3]{6\frac{V}{\pi}} \tag{26}$$

Mit der Formel für die mittlere Weglänge

$$\Lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n} \tag{27}$$

und der allgmeinen Gasgleichung

$$pV = Nk_BT \Leftrightarrow p = \frac{N}{V}k_BT = nk_BT \tag{28}$$

folgt:

$$\begin{aligned}\Lambda = 2r \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma} &= \sqrt[3]{6\frac{V}{\pi}} \\ n &= \frac{1}{\sqrt{2}\sigma\sqrt[3]{6\frac{V}{\pi}}}\end{aligned} \tag{29}$$

mit $\sigma = \pi d^2$

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[3]{6V\pi^2}d^2} \tag{30}$$

Setze in Gleichung 28

$$p = \frac{k_B T}{\sqrt{2}\sqrt[3]{6V\pi^2}d^2} = 0{,}0866\mathrm{Pa} \tag{31}$$